目　录

第一章　集合

第二章　点集

第三章　测度论

第四章　可测函数

第五章　积分论

第六章　度量空间和线性赋范空间

第七章　线性有界算子和线性连续泛函

第八章　内积空间和希尔伯特(Hilbert)空间

第九章　巴拿赫空间中的基本定理

第十章　线性算子的谱

第一章　集　合

§1. 集合概念

实变函数论建立在实数理论和集合论的基础之上，对于实数的性质，我们假定读者已经学过，所以本书只是介绍集合论方面的基本知识.

集合这个概念是数学中所谓原始概念之一，即不能用别的概念加以定义. 它象几何学中的"点"、"直线"那样，只能用一组公理去刻划. 就目前来说，我们只要求掌握以下朴素的说法：

"在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素。"

顺便说明一下，一个集合的各个元素必须是彼此互异的；哪些事物是给定集合的元素必须是明确的. 下面举出几个集合的例子.

例 1　4, 7, 8, 3 四个自然数构成的集.

例 2　全体自然数.

例 3　0 与 1 之间的实数全体.

例 4　平面上的向量全体.

例 5　[0, 1]上的所有实函数全体.

例 6　A、B、C 三个字母构成的集.

"全体大个子"并不构成一个集合. 因为一个人究竟算不算"大个子"并没有明确的界限，有时难以判断他是否属于这个集合.

一个具体集合 A 可以通过列举其元素 $a, b, c, \cdots$ 来定义，并记为

$$A=\{a, b, c, \cdots\},$$

也可以通过该集合中的各元素必须且只须满足的条件 p 来定义，并记为

$$A=\{x \mid x \text{ 满足条件 } p\}.$$

如例 1 可表示为$\{4,7,8,3\}$. 例 3 可表示为$\{x \mid x\in(0, 1)\}$.

设 A 是一个集合，x 是 A 的元素，我们称 x 属于 A，记为 $x\in A$. x 不是 A 的元素，称 x 不属于 A，记为 $x\bar{\in} A$.

一个集合由且只由其全部元素所确定. 因此，两个集合 A 与 B 当且只当它们有完全一致的元素时称为相等，记为 $A=B$. 例如

$$A=\{2, 3, 5, 7\}, \quad B=\{3, 7, 5, 2\},$$

$$c=\{x \mid x \text{ 为小于 } 10 \text{ 的素数}\},$$

我们有 $A=B=C$.

为了形式上的方便，我们引进不含任何元素的集合，称之为空集，记为 $\varnothing$. 例如

$$\varnothing=\{x \mid x\neq x\}=\{x \mid x \text{ 为实数且 } x^2=-1\}.$$

两个集合 A 与 B 如果具有关系：A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)；或称 B 包含 A，记为 $B\supset A$. 空集可以看成任何集合的子集. 若 A 是 B 的子集但不等于 B，则称 A 为 B 的真子集. 例如全体有理数是全体实数的真子集.

必须注意$\in$和$\subset$的区别. $\in$表示集合和它的元素之间的关系. $\subset$表示集合与集合之间的关系. 故当 $a\in A$ 时，不能写成 $a\subset A$，但可以写成$\{a\}\subset A$，这里$\{a\}$表示只含一个元素 a 的集合.

包含关系显然具有下面的性质:

定理 1　对任何集合 A、B、C，**均有**

(1) $A\subset A$;

(2) $A\subset B, B\subset A$, 则 $A=B$;

(3) $A\subset B, B\subset C$, 则 $A\subset C$.

通常证明两个集合相等，总是利用(2).

§2. 集合的运算

从给定的一些集合出发，我们可以通过所谓"集合的运算"作出一些新的集合，其中最常用的运算有"并"、"交"、"减法"三种.

I. 设 A、B 是任意两个集合. 设 C 是由一切或属于 A 或属于 B 的元素所组成，则我们称 C 为 A 与 B 的和集或并集，简称为和或并，记为 $C=A\cup B$. 它可表示为

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

图 1.1 是 $A\cup B$ 的示意图.

并集的概念可以推广到任意多个的情形. 设有一族集合 $\{A_\alpha\,|\,\alpha\in I\}$，其中 α 是在固定指标集 I 中变化的指标；则由一切 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的所有元素所组成的集称为这族集合的和集或并集，记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$，它可表示为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x\,|\,\text{存在某个 } \alpha\in I \text{ 使 } x\in A_\alpha\}.$$

注意，按照集合的定义，重复出现在两个被加集中的元素在作和时只能算一次.

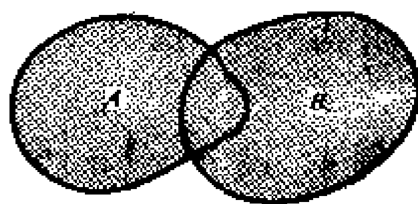


图 1.1

例 1 $A_i=\{i\}, i=1, 2, 3, \cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{1, 2, \cdots, n\},\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

例 2 设 $A_\alpha=\{x\,|\,\alpha-1<x\leqslant\alpha\}$, I 为全体实数, $\alpha\in I$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=(-\infty,+\infty).$$

例 3 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, -1+\frac{1}{i}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{i}\right\}$, i 属于全体自然数，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=(-1,1).$$

II. 设 A、B 是任意两个集合．由一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C，称为 A 和 B 的积集或交集，简称为积或交，记为 $C=A\cap B$．它可以表示为

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

如图 1.2 所示．

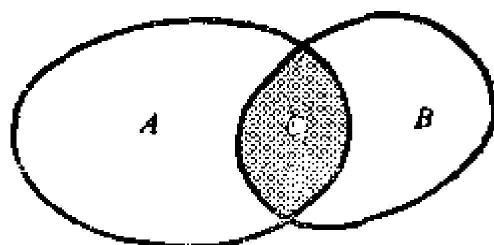


图 1.2

交的概念也可以推广到任意个集合的情形．设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是任意集族，其中 α 是指标，I 是指标集；则由一切同时属于每个 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的元素所组成的集，称为这集族的积或交，记为 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$，它可以表示为 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x\,|\,\text{对一切 } \alpha\in I \text{ 有 } x\in A_\alpha\}$.

若 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\varnothing$，说明 A_α 没有一个公共元素．

例 4 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, 0\leqslant x<1+\frac{1}{i}\right\}$, $i=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\left\{x \,\middle|\, 0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\},\quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 5 设 $A_i=\left\{x \,\middle|\, i\leqslant x\leqslant i+\frac{3}{2}\right\}$, $i=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing.$$

例 6 设 $A_i=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{i}<x<\frac{1}{i}\right\}$, $i=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\},\quad \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{0\}.$$

关于集合的并和交显然有下面的事实.

定理 1 (1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$; (交换律)

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$; (结合律)

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$; (分配律)

(4) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

证明 我们只证 $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$.

先设 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)$, 则 $x\in A$ 且有 $\alpha_0\in I$, 使 $x\in B_{\alpha_0}$. 于是

$$x\in A\cap B_{\alpha_0}\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$

这证明了

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha).$$

再证反过来的包含关系. 设 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$, 则有 $\alpha_0\in I$, 使 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$, 此即 $x\in A$, $x\in B_{\alpha_0}$, 当然更有 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$. 因此

$$x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right).\ \text{于是}\quad \bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right),$$

综合起来, 便得等式成立. 证毕.

定理 2 (1) $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$;

(2) 若 $A_\alpha \subset B_\alpha, \alpha \in I$，

则
$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

这可由定义直接推出.

III. 设 A、B 是任意两个集合，如果 C 是由一切属于 A 而不属于 B 的元素所组成，则我们称集合 C 为 A 减 B 所得的差集，记为

$$C = A - B \text{ 或 } C = A \backslash B.$$

它可以表示为

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\},$$

如图 1.3 所示. 注意，这里并不要求 $A \supset B$. 显然，一般说来，$(A \backslash B) \cup B$ 不见得等于 A.

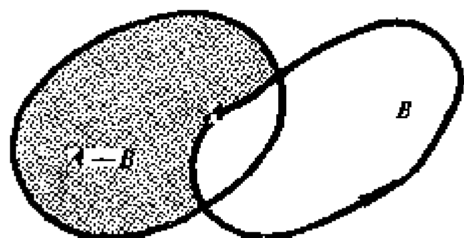


图 1.3

从减法还可导出作余集的运算. 设 $S \supset A$，则 $S \backslash A$ 表示 A 关于 S 的余集，记为 $C_S A$. 如果没有必要标出 S，也可简单地记为 CA.

定理 3 (1) $C_S S = \varnothing, C_S \varnothing = S$;

(2) $A \cup C_S A = S, A \cap C_S A = \varnothing$;

(3) $C_S(C_S A) = A$;

(4) $A \backslash B = A \cap C_S B$;

(5) 若 $A \subset B$，则 $C_S A \supset C_S B$;

(6) $C_S(A \cup B) = C_S A \cap C_S B, \quad C_S(A \cap B) = C_S A \cup C_S B$，也可推广为

$$C_S\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} C_S A_\alpha, \quad C_S\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} C_S A_\alpha.$$

定理中的(6)及其推广称为狄莫更公式. 这是一个很有用的公式，它使我们能通过余集运算把并集变为交集，把交集变为并集.

证明 我们只证$C_S\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_S A_\alpha$，其余留给读者自证。

设$x\in C_S\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$，则$x\in S$，且$x\bar{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$。于是，可知必存在某一$\alpha_0\in I$，有$x\bar{\in} A_{\alpha_0}$，故$x\in C_S A_{\alpha_0}$，从而$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_S A_\alpha$，这证明了

$$C_S\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in I} C_S A_\alpha.$$

反之，设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} C_S A_\alpha$，则存在某一个$\alpha_0\in I$，使$x\in C_S A_{\alpha_0}$，即$x\in S$，$x\bar{\in} A_{\alpha_0}$。当然，$x\bar{\in}\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$，这意味着 $x\in C_S\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)$，因而

$$\bigcup_{\alpha\in I} C_S A_\alpha\subset C_S\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right).$$

由所得两方面的结果，便知等式成立。证毕。

IV. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是任意一列集。由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的上限集或上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$。它可表示为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{x \mid 存在无穷多个 A_n，使 x\in A_n\}.$$

读者不难证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x \mid 对任意 N>0，存在一个 n，n>N 使 x\in A_n\}$。

对集列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$那种除有限个下标外，属于集列中每个集的元素全体所组成的集称为这一集列的下限集或下极限，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，它可表示为

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{x \mid 当 n 充分大以后都有 x\in A_n\}.$$

显然$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。

例 7 设 A_n 是如下一列点集：

$$A_{2m+1}=\left[0,2-\frac{1}{2m+1}\right],\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$A_{2m}=\left[0,1+\frac{1}{2m}\right],m=1,2,3,\cdots$$

我们来确定$\{A_n\}$的上极限和下极限.

因为闭区间$[0,1]$中的点属于每个A_n, $n=1,2,3,\cdots$，而对于开区间$(1,2)$中的每个点x，必存在自然数$N(x)$，使得当$n>N(x)$时，

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1},$$

即当$n\geqslant N(x)$时，$x\notin A_{2n}$，但$x\in A_{2n+1}$，换句话说，对于开区间$(1,2)$中的x，具有充分大的奇数指标的集都含有x，即$\{A_n\}$中有无限多个集合含有x，而充分大的偶数指标的集都不含有x，即$\{A_n\}$中不含x的集不会是有限个．又区间$[0,2)$以外的点都不属于任何A_n，因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,2),\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,1].$$

例 8 设 $A_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]$, $n=1,2,3,\cdots$，类似于例 7 中的讨论，可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=[0,1]$.

例 9 设 $A_{2n}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 2n,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2n}\right\}$, $n=1,2,\cdots$

$A_{2n+1}=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n+1},0\leqslant y\leqslant 2n+1\right\}$, $n=0,1,2,\cdots$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{(0,0)\},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{(x,0)\,|\,x\geqslant 0\}\cup\{(0,y)\,|\,y\geqslant 0\}.$$

集列$\{A_n\}$的上极限和下极限都可以用A_n的交和并来表示:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m,\tag{1}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{2}$$

我们利用 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid$ 对任意的 $N>0$，存在着 $n>N$，使得 $x \in A_n\}$ 来证明(1)式. 记 $P=\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，$Q=\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 设 $x \in P$ 则对任意取定的 n，总有 $m>n$，使 $x \in A_m$，即对任何 n，总有 $x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$，故 $x \in Q$. 反之，设 $x \in Q$，则对任意的 $N>0$ 总有 $x \in \bigcup_{m=N+1}^{\infty} A_m$，即总存在 $m(m>N)$，有 $x \in A_m$，所以 $x \in P$，因此 $P=Q$，即 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

(2)式可同样证明.

如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则称集列 $\{A_n\}$ 收敛，将这一集称为 $\{A_n\}$ 的极限，记为 $\lim_{n\to\infty} A_n$. 如例 8 中的集列 $\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]$，$n=1,2,3,\cdots$，收敛于极限集 $[0,1]$.

V. 单调集列. 如果集列 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \subset A_{n+1}(A_n \supset A_{n+1})$，$n=1,2,3,\cdots$，则称 $\{A_n\}$ 为单调增加(减少)集列. 单调增加与单调减少的集列统称为单调集列. 容易证明：单调集列是收敛的. 如果 $\{A_n\}$ 单调增加，则 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，如果 $\{A_n\}$ 单调减少，则 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 请读者自证.

§3. 对等与基数

本节的主要任务是研究集合中元素的“个数”的概念.

集合可分为两类——有限集合与无限集合，只含有有限多个元素的集合称为有限集，其余的称为无限集．如通常所认为的那样，有限集的典型特性应该是具有一个标志其元素个数的自然数(或0)，而确定有限集个数的方法是把集合中元素一个一个地"数"．这等于将集合中各元素按任一方式给它们编号：$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，其中 $i\neq k$ 时，a_i 和 a_k 是不同的元素．这样就把 A 和自然数列的某一截段 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 一对一地对应起来，最后对应的一个自然数 n 显然就是 A 的元素"个数"．由此不难推知，两个有限集合元素个数相同的充要条件，是它们能够和自然数列的同一截段一一对应，而这又等价于这两个集合彼此一一对应．我们打个比方．在一个大教室里，如果每个人都有一个座位，而且每个座位上都有一个人，那末我们根本不用一个一个地去"数"，便立刻知道教室中人数和座位数是相同的．

上述的讨论虽然只适用于有限集，但是一一对应的思想却不限于有限集．它将帮助我们把元素个数的概念推广到无限集．

我们来严格叙述映照和一一对应的概念．

定义1 设 A、B 为两个非空集合，如果有某一法则 φ，使每个 $x\in A$ 有唯一确定的 $y\in B$ 和它对应，则称 φ 为 A 到 B 内的映照(也称映射)，记为

$$\varphi:\ A\longrightarrow B.$$

当映照 φ 使 y 和 x 对应时，y 称为 x 在映照 φ 下的象，记作 $y=\varphi(x)$，也可表示为

$$\varphi:\ x\longmapsto y.$$

对于任一固定的 y，称适合关系 $y=\varphi(x)$ 的 x 的全体是元素 y 在 φ 之下的原象．集合 A 称为映照 φ 的定义域，记为 $\mathscr{D}(\varphi)$．设 C 是 A 的子集，C 中所有元素的象的全体，记为 $\varphi(C)$，称它是集 C 在 φ 之下的象．$\varphi(A)$ 称为映照 φ 的值域，也记为 $\mathscr{R}(\varphi)$．

如果 $\varphi(A)=B$，就称 φ 是 A 到 B 上的映照，也称映照 φ 是"到上"的．

显然，如果 φ 是由 A 到 B 上的映照，它一定也是 A 到 B 内的映照，但其逆一般不真．

特别地，如果值域 B 是一数集（实数集或复数集），映照 φ 就是定义在集 A 上的函数．如果 A、B 都是数集，它们之间的映照就是数学分析中研究的函数了．由此可见，映照概念是函数概念的推广．

容易验证：$\varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)$，$\varphi\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)$，当 A_i 两两不相交时，后一式中 $\subset$ 可换成 $=$ 号．

定义 2　设 φ 为 A 到 B 上的一个映照．如果对每个 $y\in B$，只有唯一的 x 满足 $\varphi(x)=y$，则称 φ 为 A 到 B 上的一一映照，也称一一对应，有时写作 1—1 对应，也记为 $A\xrightarrow[\varphi]{1-1}B$．

显然任何一个严格单调的函数都可以看成它的定义域到值域中的 1—1 对应．又如 $[0,1)$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=0\\ x, & \text{当 } 0<x<1\end{cases}$$

是 $[0,1)$ 到 $(0,1]$ 上的 1—1 映照．

定义 3　设 φ 为 A 到 B 上的一一映照，作 B 到 A 的映照如下：如果 $\varphi: x\longmapsto y$，令 $\psi: y\longmapsto x$．由于 φ 是一一映照，因此 ψ 确实使唯一 x 与 y 相对应，即 ψ 是映照．我们称 ψ 是 φ 的逆映照，记 ψ 为 φ^{-1}，并且

$$\varphi^{-1}:\ B\xrightarrow{1-1}A.$$

逆映照是反函数概念的推广．一个严格单调函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 可以看成映照 $f(x)$ 的逆映照．

定义 4　设 A、B 是两个非空集合．如果存在某 $\varphi: A\xrightarrow{1-1}B$，

则称 A 和 B 对等，记为 $A \sim B$. 此外约定 $\varnothing \sim \varnothing$.

例 1 我们可给有限集合一个不依赖于元素个数概念的定义：集合 A 称为有限集合，如果 $A = \varnothing$ 或者 A 和自然数的某截段 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等.

例 2 {正奇数全体}和{正偶数全体}对等. 事实上，只要令 $\varphi(x) = x + 1$ 即可.

例 3 {自然数全体}$\sim${正偶数全体}. 这只须令 $\varphi(x) = 2x$，x 是自然数.

例 4 区间 $(0, 1)$ 和全体实数 R 对等，只须对每个 $x \in (0, 1)$，令 $\varphi(x) = \mathrm{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.

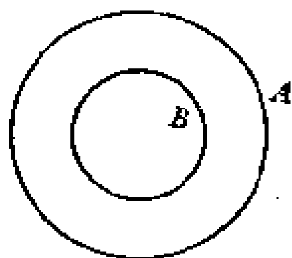


图 1.4

例 5 设 A 与 B 是两个同心圆周上的点集(图 1.4)，显然 $A \sim B$. 值得注意的是，若将此两圆周展开为直线时，则此两线段的长度并不相同. 这告诉我们，一个较长的线段并不比另一个较短线段含有"更多的点". 例 4 还表明，无限长的线段也不比有限长的线段有"更多的点".

例 3 和例 4 说明，一个无限集可以和它的一个真子集对等(可以证明，这一性质正是无限集的特征，常用来作为无限集的定义). 这一性质对有限集来说是不能成立的. 由此可以看到无限集与有限集之间的深刻差异.

对等关系显然有以下性质:

定理 1 **对任何集合** A、B、C，**均有**

(1) (反射性) $A \sim A$;

(2) (对称性) $A \sim B$ 则 $B \sim A$;

(3) (传递性) $A \sim B$, $B \sim C$ 则 $A \sim C$.

定理 2 设$\{A_n\}$和$\{B_n\}$为两集列. 集列$\{A_n\}$中任何两个集不相交，集列$\{B_n\}$中的集亦两两不相交，即

$A_{n'}\cap A_{n''}=\varnothing$, $B_{n'}\cap B_{n''}=\varnothing$ (当 $n'\neq n''$)，如果 $A_n\sim B_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

证明可由定义直接得出.

根据定理 1，我们可把彼此对等的集合归做一类. 这样任何集合属于一类. 我们把两个彼此对等的集合称为具有相同的基数(亦称势、浓度)，用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的基数.

注 基数的概念可以看作有限集合中所含元素个数的推广. 要对基数下一个精确的定义是一件相当复杂的事情. 上面我们只是作了通俗的说明. 严格的定义需要很多的准备知识. 下面是一个大致的描述. 对于一个集合 A，我们考虑所有与 A 对等的集合所构成的类. 公理集合论允许我们从每一个这样的类中按确定的方式选出一个代表(即所谓良序集——依某种意义排好了次序的集)，我们就把这个代表定义为这一类中各个集合的基数，记它为 $\overline{\overline{A}}$. 可以证明，在这样的定义下，保证了

(1) 对任何集合 A, B, $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，当且仅当 $A\sim B$;

(2) 当 A 为非空有限集时，A 一定能和自然数列$\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$中的一个段$\{1, 2, \cdots, n\}$相对应，而$\{1, 2, \cdots, n\}$就是一个良序集，可以作为 A 所在的那个类的代表.

又由于$\{1, 2, \cdots, n\}$正好是自然数 n 以前的那一段，也可以简单地用 n 来表示，于是 $\overline{\overline{A}}=\{1, 2, \cdots, n\}$ 也可以用自然数 n 来标志. 这就把有限集的基数和通常的个数概念统一起来了，而对无限集来说，$\overline{\overline{A}}$ 当然就是通常元素个数概念的推广。

定义 5 设 A、B 是两个集合，如果 A 不和 B 对等，但存在 B 的真子集 B^*，有 $A\sim B^*$，则称 A 比 B 有较小的基数(或 B 比 A 有较大的基数)并记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$).

自然，我们要提出问题：任给两个集合 A、B，在

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

中是否必有一个成立且只有一个成立呢？回答是肯定的．但是第一个问题的论证较为复杂，不能在此讨论，我们研究第二个问题．

定理 3（伯恩斯坦 Bernstein 定理） 设 A、B 是两个非空集合，如果存在 $S\subset A$, $T\subset B$ 使 $A\sim T$, $B\sim S$，则 $A\sim B$.

注 利用基数的说法是：设 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$ 则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明 由假设存在 $\varphi: A\xrightarrow{1-1}T$ 及 $\psi: B\xrightarrow{1-1}S$. 我们设法找 $\tilde{A}\subset A$ 及 $\tilde{B}\subset B$，使 φ 将 $\tilde{A}$ 映成 $B-\tilde{B}$，同时 ψ 将 $\tilde{B}$ 映为 $A-\tilde{A}$，亦即解联立方程

$$\begin{cases}\varphi(\tilde{A})=B-\tilde{B},\\ \psi(\tilde{B})=A-\tilde{A},\end{cases}$$

或等价地

$$\begin{cases}\tilde{A}=A-\psi(\tilde{B}),\\ \tilde{B}=B-\varphi(\tilde{A}).\end{cases}\tag{1}$$

为了解(1)式我们试用迭代法，依次作

$$\begin{array}{ll}A_1=A-\psi(B), & B_1=B-\varphi(A_1),\\ A_2=A-\psi(B_1), & B_2=B-\varphi(A_2),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots,\\ A_n=A-\psi(B_{n-1}), & B_n=B-\varphi(A_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots,\end{array}$$

其中 A_1, A_2, …都是 A 的子集，B_1, B_2, …都是 B 的子集，并令 $B_0=B$. 作所有 A_n 之并，再利用狄莫更公式及定义 1 后面之公式，并注意到由于 ψ 是 1—1 映照，有 $\psi\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\psi(B_i)$，得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A-\psi(B_{n-1}))=A-\bigcap_{n=1}^{\infty}\psi(B_{n-1})$$

$$=A-\psi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_{n-1}\right)=A-\psi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right),$$

最后的等式用到 $B_1\subset B_0$. 类似地

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(B-\varphi(A_n))=B-\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)=B-\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right).$$

可见

$$\tilde{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad \tilde{B}=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$$

至少是(1)式的一对解. 最后再定义映照

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 当\ x\in\tilde{A}\\ \psi^{-1}(x), & 当\ x\in A-\tilde{A},\end{cases}$$

则有 $\Phi:A\xrightarrow{1-1}B$, 即 $A\sim B$. 证毕.

注意, 这一定理给我们提供了一个判定两个集合对等的有力工具. 作为定理的应用, 我们可证明如下结论. 设 $A\supset B\supset C$, 且 $A\sim C$, 则 $A\sim B\sim C$. 事实上, 由假设知 $B\sim C^*\subset C$ 及 $C\sim B^*\subset B$, 再由伯恩斯坦定理知 $B\sim C$, 从而 $A\sim B$, 故 $A\sim B\sim C$.

§4. 可 数 集 合

在本节中我们将较详细的讨论无限集合中最简单同时也是最常见的一类集合.

有限集合既然是那些和自然数列某一截段 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对等的集合, 那么, 在无限集合中首先受到重视的当然是那些和全体自然数所成之集合对等的集合了(自然数列本身就是这种集合).

定义 1 凡和全体自然数所成之集合 N 对等的集合都称为可数集合或可列集合.

由于 N 可按大小顺序排成一无穷序列:

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots.$$

因此，一个集合 A 是可数集合的充要条件为：A 可以排成一个无穷序列：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots.$$

可数集合是无限集合，那末它在一般无限集合中处于什么地位？

定理 1　任何无限集合都至少包含一个可数子集.

证明　设 M 是一个无限集，因 $M \neq \varnothing$，总可以从 M 中取一元素记它为 e_1. 由于 M 是无限集，故 $M - \{e_1\} \neq \varnothing$，于是又可以从 $M - \{e_1\}$ 中取一元素，记它为 e_2，显然 $e_2 \in M$ 且 $e_1 \neq e_2$，设已从 M 中取出 n 个这样的互异元素 e_1，e_2，$\cdots$，e_n，由于 M 是无限集，故 $M - \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \neq \varnothing$，于是又可以从 $M - \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 中取一元素，记它为 e_{n+1}；显然 $e_{n+1} \in M$ 且和 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 都不相同，这样由归纳法，我们就找到 M 的一个无限子集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$，它显然是一个可数集.

这定理说明可数集的一个特征：**它在所有无限集中有最小的基数.**

下面的定理告诉我们可数集有怎样的子集.

定理 2　可数集合的任何无限子集必为可数集合，从而可数集合的任何子集或者是有限集或者是可数集.

证明　设 A 为可数集而 A^* 是 A 的一个无限子集，则由于 A^* 是 A 的子集，有 $\overline{\overline{A^*}} \leqslant \overline{\overline{A}}$，又由于 A^* 是无限集合，而 A 是可数集，依定理 1 有 $\overline{\overline{A^*}} \geqslant \overline{\overline{A}}$，因此按伯恩斯坦定理就有 $\overline{\overline{A^*}} = \overline{\overline{A}}$. 即 A^* 也是可数集.

下面我们来研究由可数集出发通过加法运算可产生什么样的集合？

定理 3　设 A 为可数集，B 为有限或可数集，则 $A \cup B$ 为可数集.

证明 (1) 先设 $A\cap B=\varnothing$.

由于可数集总可排成无穷序列，不妨设 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$(当 B 有限时)或 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$(当 B 可数时). 由于当 B 有限时(B 排到前, A 排在后),

$$A\cup B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1, a_2, \cdots\};$$

又当 B 可数时(交错排列),

$$A\cup B=\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots\}.$$

可见 $A\cup B$ 总可以排成无穷序列，从而是可数集.

(2) 一般情形

此时，令 $B^*=B-A$, 则 $A\cap B^*=\varnothing$, $A\cup B=A\cup B^*$, 但 B^* 作为 B 的子集仍为有限或可数集(定理 2)，这样就归结到(1)的情形了。

推论 设 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$**是有限集或可数集，则** $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ **也是有限集或可数集，但如果至少有一个** A_i **不是有限集，则** $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ **必为可数集.**

定理 4 **设** $A_i(i=1, 2, 3, \cdots)$**都是可数集，则** $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ **也是可数集.**

证明 (1) 先设 $A_i\cap A_j=\varnothing$, $(i\neq j)$.

因 A_i 都是可数集，故可置

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11}, \to a_{12}, a_{13}, \to a_{14}, \cdots\}, \\
\qquad\quad \swarrow \qquad \nearrow \quad \swarrow \\
A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \cdots\}, \\
\qquad\quad \downarrow \nearrow \quad \swarrow \\
A_3=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \cdots\}, \\
\qquad\quad \swarrow \\
A_4=\{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \cdots\}, \\
\qquad\quad \downarrow \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}$$

照箭头顺序可将 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 排成:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, \cdots\}.$$

因此, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集(注意上面的证明当 A_i 是有限集或可数集时仍可适用).

(2) 一般情形

令 $A_1^*=A_1, A_i^*=A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad (i\geqslant 2)$, 则 $A_i^* \cap A_j^*=\varnothing$(当 $i\neq j$ 时), 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$.

今 A_i^* 都是有限集或可数集(定理 2), 如果只有有限个 A_i^* 不为空集, 则由定理 3 的推论, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 为可数集(因至少 $A_1^*=A_1$ 为可数集), 如果有无限多个(必为可数个) A_i^* 不为空集, 则由(1)末之注意, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^*$ 也是可数集, 故在任何场合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 都是可数集.

今后我们用 a (或 $\aleph_0$)表示可数集的基数, 则定理 3 的推论可简记为:

$$n\cdot a=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=a;$$

而本定理的结论就可简记为:

$$a\cdot a=a+\underbrace{a+\cdots+a+}_{\text{可数个}}\cdots=a$$

定理 5　有理数全体成一可数集合.

证明　设 $A_i=\left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \cdots\right\} \quad (i=1, 2, 3, \cdots)$, 则 A_i 是可

数集，于是由定理 4 知全体正有理数成一可数集 $Q^+=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，因正负有理数通过 $\varphi(r)=-r$，成为 1—1 对应，故全体负有理数成一可数集 Q^-，但有理数全体所成之集合 $R=Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$，故由定理 3 的推论知 R 为可数集.

应该注意，有理数在实数中是处处稠密的，即在数轴上任何小区间中都有有理数存在（并且有无穷多个）. 尽管如此，全体有理数还只不过是一个和那样稀疏分布着的自然数全体成为 1—1 对应的可数集. 这个表面看来令人难以置信的事实，充分说明了要判断一个集合是否可数时应该特别加以小心.

定理 6　若 A 中每个元素由 n 个互相独立的记号所决定，各记号跑遍一个可数集

$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\},\ (x_k=x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots;\ \ k=1,2,\cdots,n)$$

则 A 为可数集.

证明　用数学归纳法予以证明.

若 $n=1$，则定理显然为真. 今假设当 $n=m$ 时定理是真的，由此证明当 $n=m+1$ 时亦真.

设
$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}}\},$$

A 中满足 $x_{m+1}=x_{m+1}^{(i)}$ 的元素，记其全体为 A_i，则由假定

$$A_i=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}^{(i)}}\}$$

为一可数集，而

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,$$

所以 A 是可数集.

例 1　平面上坐标为有理数的点全体所成的集为一可数集.

例 2　元素 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$，由 k 个自然数所组成的，其全体成

一可数集.

例 3 整系数多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的全体是一可数集.

事实上，先固定n，由定理6，整系数的n次多项式的全体是一可数集，再用定理 4 即得.

每个多项式只有有限个根，所以得下面的定理.

定理 7　代数数的全体成一可数集.

(所谓代数数，乃是整系数多项式的根).

§5. 不可数集合

到目前为止，在无限集合中我们只讨论了可数集，是不是无限集全都是可数集合呢？如果真是这样的话，那么所有无限集合将只能具有同一的基数，而基数概念的引进也将没有什么意义了. 下面我们将看到事实并非如此.

不是可数集合的无限集合我们称为不可数集合.

定理 1　全体实数所成之集合 R 是一个不可数集合.

证明　由 § 3 例 4 知$R\sim(0,1)$，我们只要证明$(0,1)$不是可数集就好了. 首先$(0,1)$中每一个实数 a 都可以唯一地表示为十进位无穷小数：

$$a=0.a_1a_2a_3\cdots$$

的形式，其中各a_n是0，1，…，9 中的一个数字，不全为0，且不以9为循环节，我们称实数的这种表示为一个正规表示. 反之，每一个上述形式的无穷小数都是$(0,1)$中某一实数的正规表示.

现用反证法：假设$(0,1)$中的全体实数可排列成一个序列

$$(0,1)=\{a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)},\cdots\}.$$

将每个 $a^{(n)}$表示成正规的无穷小数：

$$a^{(1)} = 0.\, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \cdots,$$
$$a^{(2)} = 0.\, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \cdots,$$
$$a^{(3)} = 0.\, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

现在设法找一个与所有这些实数都不同的实数. 为此利用对角线上的数字$a_n^{(n)}$ $(n=1, 2, \cdots)$作一个无穷小数如下:

$$0.\, a_1 a_2 a_3 \cdots, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} 1, \text{ 如果 } a_n^{(n)} \neq 1, \\ 2, \text{ 如果 } a_n^{(n)} = 1. \end{cases}$$

则此无穷小数既不全是0, 也不以 9 循环, 因此必是$(0, 1)$中某一实数 a 的正规表示, 但从这个无穷小数的作法可知, 它与每一个$a^{(n)}$的正规表示都不同(因为至少第 n 位小数不同), 因此$a \neq a^{(n)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 从而$(0, 1) \neq \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \cdots\}$, 与假设矛盾. 因此$(0, 1)$是不可数集合.

推论 1 **若用 c 表示全体实数所成集合 R 的基数, 用 a 表示全体自然数所成集合 N 的基数, 则$c > a$.**

以后称 c 为连续基数. c 有时记为 $\aleph$).

定理 2 **任意区间(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(0, \infty)$, $[0, \infty)$均具有连续基数c.** (这里$a < b$)

定理 3 **设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一列互不相交的集合, 它们的基数都是$c$, 则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的基数也是$c$.**

证明 设$I_n = [n-1, n)$, 则$I_n \cap I_m = \varnothing$ $(m \neq n)$, 但$\overline{\overline{I_n}} = c$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 故$I_n \sim A_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0, \infty),$$

于是由定理 2 即得.

定理 4 **实数列全体E_∞的基数是 c.**

证明 记B为E_∞中适合$0<x_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$的点$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$的全体．设$x\in B$，$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，作映照$\varphi$：

$$\varphi(x)=\left\{\operatorname{tg}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \operatorname{tg}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots,\ \operatorname{tg}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots\right\}.$$

显然，B到E_∞上的映照φ是一对一的．我们只须证明B的势是c．

事实上，首先把$(0,1)$中任何x与B中点

$$\bar{x}=\{x,x,x,\cdots\}$$

对应，就知道$(0,1)$对等于B的一个子集．

反之，对B中的任何$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$按十进位无限小数表示$x_n$有

$$\begin{aligned}
x_1&=0.\,x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,\\
x_2&=0.\,x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
x_n&=0.\,x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

由上述一列数$x=\{x_n\}\in E_\infty$，作一小数$\psi(x)$：

$$\psi(x)=0.\,x_{11}x_{12}x_{21}x_{31}x_{22}x_{13}x_{14}x_{23}\cdots$$

显然$\psi(x)\in(0,1)$而且当$x\neq y$时，$\psi(x)\neq\psi(y)$．由映照ψ，B也对等于$(0,1)$的一个子集．所以由伯恩斯坦定理得$B\sim(0,1)$，定理证毕．

设n为一个自然数，称由n个实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，按确定的次序排成的数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$全体称为n维欧几里得空间①，记为R^n，

① 此地暂不提及欧氏空间中的距离等．

每个组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为欧几里得空间的点．又 x_i 称为点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的第 i 个坐标．

定理 5 n **维欧几里得空间R^n的基数为c．**

证明 如将R^n中点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对应于E_∞中点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0, \cdots)$时，就知道$R^n$对等于$R^1$的子集．如果再将$R^1$中点对应于$R^n$中点$(x, 0, \cdots, 0,)$时，又知道$R^1$对等于$R^n$ 的一个子集．所以由伯恩斯坦定理知道$\overline{\overline{R^n}} = \overline{\overline{R^1}} = c$．

推论 2 **设有** c **个**(c表示连续基数)**集的并集，若每个集的基数都是**c，**则其和集的基数也是**c．

事实上，对于每一个被加的集使与平面xOy上平行于Ox轴的直线上点的集做成一一对应，也就得到所述的并集与平面xOy 上点的集做成了一对一的对应．

定理 3 及推论2，可用记号简写如下：

$$c + c + \cdots = c \cdot a = c, \quad c \cdot c = c.$$

由于我们已经证明任意 n 维的欧氏空间中所有的点也不过作成一个基数为 c 的集，似乎又产生了一个新的问题，即有没有一个集合M，它有比 c 还大的基数呢？下面的定理圆满地解答了这个问题．

定理 6 **设M是任意的一个集合，它的所有子集作成新的集合μ，则$\overline{\overline{\mu}} > \overline{\overline{M}}$．**

证明 我们先证明μ不能与M对等．假设不然，即$\mu \sim M$，则对应于每一$\alpha \in M$，都应有M的一子集 M_α 与之对应．现在我们将M中所有那样的α，它使 $\alpha \overline{\in} M_\alpha$ 的，作成一集 M^1，则$M^1 \subset M$，所以$M^1 \in \mu$，从而应有M中元素α^1与之对应．若 $\alpha^1 \in M^1$，则与M^1之定义矛盾．因 M^1 是由那些$\alpha \overline{\in} M_\alpha$ 的 α 作成的，可见 $\alpha^1 \overline{\in} M^1$．但是如果$\alpha^1 \overline{\in} M^1$，那末$\alpha^1$又应该属于$M^1$，因为 M^1是包括了所有$\alpha \overline{\in} M_\alpha$的$\alpha$ 的．这就产生了矛盾，因而M不对等于 μ．至于M对等于μ的

一个子集，则是显然的事实，因为那些只含一个元素的子集自然是作成一个对等于M的μ的子集.

定理 6 告诉我们没有一个最大的基数，从而无限集合的不同基数也有无限之多.

§ 6. 半序集和曹恩(Zorn)引理

I. 顺序关系　顺序是数学中常用的概念之一. 例如实数大小就是一种重要的顺序关系. 又如 极限概念所研究的主要就是变量按照一定的顺序变化的趋势. 但是在许多情况下，在集合中不是任何两个元素之间都可以自然地定义顺序. 例如在构造积分和数的时候，需要考查积分区间里所取的各种不同的分点组. 令A表示$[a, b]$中所有有限分点组$\mathscr{D}$全体，我们在A中规定：当$\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2 \in A$而且$\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}_2$时，说$\mathscr{D}_1$在$\mathscr{D}_2$前，这是一种顺序关系，但是$A$中确实有这样的$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$，$\mathscr{D}_1$既不包含在$\mathscr{D}_2$中，$\mathscr{D}_2$也不包含在$\mathscr{D}_1$中，这样$\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$之间就不存在上述的顺序关系. 所以我们需要考察这样的情况：在集中只是一部分元素之间具有顺序关系. 从积分的理论中也可以看出这种顺序关系是十分重要的. 在其它数学领域中也常会遇到这一基本概念. 现在我们给出序的概念，从而引入半序集.

定义 1　设A是一集，在其中规定了某些元素之间的关系“$\prec$”，它满足以下条件：

1°　自反性　对A中的一切元素a成立着$a \prec a$；

2°　如果$a \prec b$，而且$b \prec a$，那末$a = b$；

3°　传递性　如果$a \prec b$，而且$b \prec c$，就有$a \prec c$，

那末称关系“$\prec$”为A中的一个顺序. $a \prec b$读成a在b前（或b在a后），这时称集A按顺序$\prec$成一半序集，或者说A是有半序的.

例 1　设B是一个非空集，A是B的所有子集所成的集. 如果

子集之间用包含关系“$\subset$”作为A中某些元素间的顺序，即当u, $v\in A$，且$u\subset v$时，规定$u\prec v$，那末显然这是一种顺序（称它是自然顺序），因而A按此顺序成为一个半序集.

例 2 设B是一个集，A是B上的实函数全体. 当$a, b\in A$，而且对每个$t\in B$，都有$a(t)\leqslant b(t)$时，规定$a\prec b$，那末A按此顺序也成为半序集.

例 3 设A是某些实数所成的集，在A中规定：当$a\leqslant b$时为$a\prec b$. 显然A成一个半序集，这个顺序称为自然顺序.

例 4 设A是所有实数对(x, y)全体，规定两对(x_1, y_1)，(x_2, y_2)当$x_1<x_2$或$x_1=x_2$而$y_1\leqslant y_2$时，为$(x_1, y_1)\prec(x_2, y_2)$. 这是$A$中的一个顺序关系，称为字典顺序（因为它和拼音文字字典的字序类似）.

定义 2 设集A中已经定义了顺序关系“$\prec$”，如果对A中的任何两个元素a, b，都可以确定它们之间的顺序，即$a\prec b$与$b\prec a$两个关系式中必有一个成立，就称A是一个全序集.

在例 3 中的数集A，按自然顺序（或逆自然顺序）是全序集. 在例1，例 2 中，当B不止含有一个元素时，A都不是全序集.

设A是一个半序集，B是A的子集. 如果有$a\in A$，使得对每个$b\in B$，成立着$b\prec a$，即a在B中所有元素之后，那末称a为子集B的上界. 类似地有下界的概念. 对一个子集，可以没有上界或下界，在上界、下界存在时也不一定是唯一的. 例如取A为实数区间$(0, 1)$，以自然顺序为顺序，取$B=A$，显然B在A中就不存在上界，也不存在下界.

例 5 对每个自然数n作区间$(0, 1)$上的下列分点组D_n:

$$D_n=\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\},$$

所有这些分点组的全体记作$\mathscr{D}$. 令B表示$[0, 1]$中的有理数全体.

令 A 表示 B 的全体子集. 于是 $\mathscr{D}\subset A$. 象例 1 中所规定的那样, 在集 A 中以包含关系 $\subset$ 作为元素间的顺序, A 成为半序集. 于是 $B\in A$. 显然, 对任何 $D_n\in\mathscr{D}$, 都有 $D_n\subset B$. 所以 B 是 $\mathscr{D}$ 的上界.

设 A 是一个半序集, $a\in A$, 如果在 A 中不存在别的元素 $b(b\neq a)$ 在 a 之后, 那么称 a 为 A 的极大元. 换句话说, 极大元 a 是具有下面性质的元素: 如果 $b\in A$, 而且 $a\prec b$, 那末必有 $b=a$. 半序集的极大元不一定是唯一的. 例如两个元素 a, b 所组成的集 A, 其中规定 $a\prec a$, $b\prec b$, 则 A 是半序集, 而 a 和 b 都是 A 的极大元. 但是在全序集中极大元素是唯一的.

类似地也有极小元的概念.

II. 曹恩(Zorn)引理 下面介绍一个引理, 它是研究"无限过程"的一个逻辑工具, 在泛函分析的基本理论中常要用到. 这个引理是作为关于半序集的一个公理来接受的.

曹恩(Zorn)引理 设 A 是一个半序集, 如果 A 的每个全序子集都有上界, 那末 A 必有极大元.

类似地有关于下界和极小元(存在性)的引理.

曹恩引理是证明别的一些定理的基础. 作为公理, 它并不象别的公理那样直观, 那样明显, 因而有必要作些简略的说明.

这个引理的正确性, 可以这样粗略地看 (但这不是逻辑的证明): 如果 A 是一个半序集, 任意取 A 中的一个元素 a_1, 如果它不是极大元, 那末必有元素 $a_2\in A$, $a_2\neq a_1$, 使得 $a_1\prec a_2$. 这样继续下去, 可以得到一个全序子集

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

依假设, 它必有上界记为 a_ω. 如果 a_ω 不是极大元, A 中必有一个元素在 a_ω 之后, 记它为 $a_{\omega+1}$(这里 $\omega+1$ 且理解为一个记号); 再继续下去, 又得到全序子集

$$a_1, \cdots, a_\omega, a_{\omega+1}, \cdots, a_{\omega+m}, \cdots$$

由假设，它必有上界记为$a_{2\omega}$.（这里2ω也是一个记号，我们不去讨论它的意义），这样一直做下去，总可以找到极大元.

如果对上述过程加以严格分析，就会发现事实上已经运用了另一个公理——策墨罗(Zermelo)的选取公理，这个公理最初是为了解决基数的比较问题而提出来的.

选取公理 设 $S=\{M\}$**是一族两两不相交的非空的集，那末存在集**L**满足下面两个条件:**

1° $L\subset\bigcup_{M\in S}M$

2° 集L**与**S**中每一个集**M**有一个而且只有一个公共元素.**

选取公理（又称选择公理）和曹恩引理是等价的. 等价性的证明限于篇幅我们这里不介绍了①.

最后，我们用半序概念对复数体作一点说明. 大家知道，复数照通常的四则运算构成体，但不是有序体. 这就是说，我们无法将所有复数排成全序集，并使得这一全序和四则运算之间满足

1° 加法保序性：若$a\leqslant b$，c是任何复数，则$a+c\leqslant b+c$；

2° 乘正数保序性：若$c\geqslant0$，$a\leqslant b$，则$ac\leqslant bc$.

事实上，如果将复数排成一个全序，那末$i>0$或$i<0$二者必居其一. 设$i>0$，由条件1° $i+(-i)>-i$，即$-i<0$. 现在i是"正数"，将它乘$-i<0$，得$1<0$，再乘i，得$i<0$，矛盾. 同样$i<0$也得到矛盾.

注意，将复数排成全序并不难，（如字典序：实部小的在前，实部相等时虚部小的在前），只是这种全序不能满足1°、2° 两个条件而已.

然而，复数体可以构成半序体. 我们对任意两个复数$z_1=a_1+b_1i$和$z_2=a_2+b_2i$，当$a_1\leqslant a_2$，$b_1\leqslant b_2$同时成立时称$z_1\leqslant z_2$. 不

① 参看 Zaanen, A. C., An Introduction to the Theory of Integration, North-Holland, Amsterdam, 1958.

难验证，这个"$\leqslant$"满足半序定义．对这一半序，还满足加法保序性和乘"正数"保序性，这时"正数"指实部和虚部都为正的复数．证明留给读者．

第一章 习 题

1．证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2．证明

(1) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$;

(2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$;

(3) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

(4) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$;

(5) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

(6) $A-(A-B)=A\cap B$.

3．证明 $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$;

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

4．证明 $C_S(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_SA_i$.

5．证明

(1) $(\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha)-B=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$;

(2) $(\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha)-B=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(A_\alpha-B)$.

6．设$\{A_n\}$是一列集合，作 $B_1=A_1$, $B_n=A_n-(\bigcup\limits_{v=1}^{n-1}A_v)$, $n>1$. 证明 B_n 是一列互不相交的集，而且 $\bigcup\limits_{v=1}^{n}A_v=\bigcup\limits_{v=1}^{n}B_v$, $n=1,2,3,\cdots$.

7．设 $A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $A_{2n}=(0,n)$, $n=1,2,\cdots$, 求出集列$\{A_n\}$的上限集和下限集．

8. 证明$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

9. 作出一个$(-1,1)$和$(-\infty,+\infty)$的1—1对应，并写出这一对应的解析表达式.

10. 证明将球面去掉一点以后，余下的点所成的集合和整个平面上的点所成的集合是对等的.

11. 证明由直线上互不相交的开区间作为集A的元素，则A至多为可数集.

12. 证明所有系数为有理数的多项式组成一可数集.

13. 设A是平面上以有理点(即坐标都是有理数)为中心，有理数为半径的圆的全体，则A是可数集.

14. 证明单调增加函数的不连续点最多只有可数多个.

15. 试找出使$(0,1)$和$[0,1]$之间1—1对应的一种方法.

16*. 设A是一个无穷集合，则必有$A^*\subset A$，使$A^*\sim A$，而$A-A^*$可数.

17*. 设A是一可数集合，则A的所有有限子集作成的集合亦必可数.

18. 证明$[0,1]$上的全体无理数作成的集其势为c.

19. 若集A中每个元素，由互相独立的可数个指标所决定，即$A=\{a_{x_1 x_2 x_3 \cdots}\}$，而每个$x_i$取自一个基数为$c$的集，则$A$的基数也是$c$.

20. 设集A与B的并集之基数为c，证明A及B中必有一个集的基数也是c.

21. 设$\{x_n\}$为一序列，其中元素彼此不同，则它的子序列全体组成基数为c的集.

第二章　点　　集

本章将研究一种特殊的集合——空间中的点集. 所谓空间, 是一类具有某种结构的集合. 例如实数直线 l 构成一维空间. "任何两点间有距离", "实数之间可以引进四则运算"等都是其中的结构. 本章着重研究 n 维欧氏空间, 但从较一般的度量空间开始.

§1. 度量空间 · n 维欧氏空间

让我们回忆数学分析中的极限概念. 我们定义 x_n 的极限是 x, 要用绝对值 $|x_n - x|$ 来表示 x_n 和 x 的接近程度. 如果我们将实数直线 R 上任何两点 a 和 b 之间的距离 $d(a,b)$ 用 $|a-b|$ 加以表示, 那么所谓 R 中点列 x_n 收敛于 x, 就意味着 x_n 和 x 之间的距离随 $n\to\infty$ 而趋于0, 即

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

这使我们想到, 在一般的点集 E 中如果也有"距离", 那么在点集 E 中也可借这一距离定义极限, 这对研究集合的性质将是极重要的工具. 那么, 究竟什么是距离呢?

设 X 是一个集合, 若对于 X 中任意两个元素 x, y, 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之对应, 而且这一对应关系满足下列条件:

1° $d(x,y)\geqslant 0$, $d(x,y)=0$ 的充要条件为 $x=y$;

2° $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$, 对任意 z 都成立,

则称 $d(x,y)$ 是 x, y 之间的距离, 称 (X, d) 为度量空间或距离空间. X 中的元素称为点, 条件2°称为三点不等式.

距离 d 有对称性，即 $d(x,y)=d(y,x)$．实际上，在三点不等式中取 $z=x$，并由条件 1° 知

$$d(x,y)\leqslant d(x,x)+d(y,x)=d(y,x).$$

由于 x 和 y 的次序是任意的，故同样可证 $d(y,x)\leqslant d(x,y)$，这就得到 $d(x,y)=d(y,x)$．

如果 (X,d) 是度量空间，Y 是 X 的一个非空子集，则 (Y,d) 也是一个度量空间，称为 (X,d) 的子空间．

下面我们举一些度量空间的例子．

例1　欧氏空间 R^n．

对 R^n 中任意两点

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),$$

规定距离

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证 $d(x,y)$ 满足距离的条件．首先，条件 1° 显然是满足的．现在验证条件 2°：

由柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

得到

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.$$

令 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，$a_i=\zeta_i-\xi_i$，$b_i=\eta_i-\zeta_i$，则

$$\eta_i-\xi_i=a_i+b_i.$$

代入上面不等式即为三点不等式.

(R^n,d)称为n维欧氏空间，其中d称为欧几里得距离.

此外，在R^n中还可以用下面方法定义其他的距离：

$$\rho'(x,y)=\max_i|\xi_i-\eta_i|;$$

$$\rho''(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|.$$

容易验证ρ'，ρ''也满足距离条件1°和2°. 由此可知，在一个集合引入距离的方法可以不限于一种.

例 2 $C[a,b]$空间.

令$C[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上实值(或复值)连续函数全体，对$C[a,b]$中任意两点x,y，定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

容易验证它满足距离条件1°和2°.

例 3 l^2.

记 $l^2=\{x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty\}$. 设$x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in l^2$，$y=\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\in l^2$，定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

则d是l^2上的距离(可以证明$d<\infty$). 距离条件的1°是容易得出的. 现检验条件2°.

对固定的n，$x^{(n)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)$和$y^{(n)}=(y_1,y_2,\cdots,y_n,0,0,\cdots)$都是$R^n$中元素，故对固定的$n$，有Cauchy不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}y_k^2.$$

不等式右端令$n\to\infty$，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2.$$

再令左端的 n 趋于∞，即得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2<\infty.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)^2&=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2+2\sum_{k=1}^{\infty}x_k y_k+\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

今取$\xi=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\eta=\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\zeta=\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$. 以 $x_k=\zeta_k-\xi_k$，$y_k=\eta_k-\zeta_k$ 代入上式，即可得ξ,η,ζ 的三点不等式

$$d(\xi,\eta)\leqslant d(\xi,\zeta)+d(\zeta,\eta).$$

由上述例子可见，度量空间除了有限维的欧几里得空间R^n之外，还包括其他的空间，如$C[a,b]$和l^2空间等等，这些将在泛函分析部份详细论述.

下面我们将考察距离空间中的极限，开集，闭集等一系列概念，它们的基础都是邻域，而邻域则依靠距离即可作出. 为了行文简单，不致被一些具体空间的特性分散注意力，我们先限制在R^n中讨论. 其实本章的结论在一般度量空间中也都是成立的. 这一点我们在第六章还要涉及.

我们从定义邻域的概念开始.

定义 1 R^n中所有和定点 P_0之距离小于定数 $\delta>0$ 的点的全

体，即集合

$$\{P \mid d(P, P_0)<\delta\}$$

称为点 P_0 之 δ 邻域，并记为 $U(P_0, \delta)$. P_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 在不需要特别指出是怎样的一个半径时，也干脆说是 P_0 的一个邻域，记作 $U(P_0)$. 显然，在 R^1, R^2, R^3 中的 $U(P_0, \delta)$，就是以 P_0 为中心 δ 为半径的开区间，开圆和开球.

容易证明邻域具有下面的基本性质：

(1) $P \in U(P)$;

(2) 对于 $U_1(P)$ 和 $U_2(P)$，存在 $U_3(P) \subset U_1(P) \cap U_2(P)$;

(3) 对于 $Q \in U(P)$，存在 $U(Q) \subset U(P)$;

(4) 对于 $P \neq Q$，存在 $U(P)$ 和 $U(Q)$，使 $U(P) \cap U(Q)=\varnothing$.

定义 2 设 $\{P_n\}$ 为 R^n 中一点列，如果当 $n \to \infty$ 时有 $d(P_n, P_0) \to 0$，则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0. 记为 $\lim\limits_{n \to \infty} P_n=P_0$ 或 $P_n \to P_0$ $(n \to \infty)$. 用邻域的术语来说，就是：对于 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$，存在某个自然数 N，使当 $n>N$ 时，$P_n \in U(P_0)$.

定义 3 两个非空的点集 A、B 的距离定义为

$$d(A, B)=\inf_{\substack{P \in A \\ Q \in B}} d(P, Q).$$

定义 4 一个非空点集 E 的直径定义为

$$\delta(E)=\sup_{\substack{P \in E \\ Q \in E}} d(P, Q).$$

定义 5 设 E 为 R^n 中一点集，如果 $\delta(E)<\infty$，则称 E 为有界点集(空集也作为有界点集).

显然，E 为有界点集的充要条件是存在常数 k，使对于所有的 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E$，都有 $|x_i| \leqslant k$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 即存在常数 k，对所有 $x \in E$ 有 $d(x, 0)<k$，这里 $0=(0, 0, \cdots, 0)$，称为 n 维空间的原点.

定义 6 点集 $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i<x_i<b_i, i=1,2, \cdots, n\}$ 称为

一个开区间(n维),如将其中不等式一律换成$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 或$a_i < x_i \leqslant b_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则称之为一个闭区间或左开右闭区间. 当上述各种区间无区别的必要时,统称为区间,记作I.

$b_i - a_i$, $i=1,2,\cdots,n$称为I的第i个"边长", $\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$称为I的"体积",记为$|I|$.

§2. 聚点·内点·界点

设E是n维空间R^n中的一个点集,P_0是R^n中的一个定点,我们来研究P_0与E的关系. 现在有三种互斥的情形:

第一,在P_0的附近根本没有E的点;

第二,P_0附近全是E的点;

第三,P_0附近既有E的点,又有不属于E的点.

针对这些情况我们给出下述定义:

定义1 如果存在P_0的某一邻域$U(P_0)$,使$U(P_0) \subset E$,则称P_0为E的内点;

如果P_0是CE的内点(这里余集是对全空间R^n来作的,即$CE = C_{R^n}E$,以后仿此),则称P_0为E的外点;

如果P_0既非E的内点又非E的外点,也就是:P_0的任一邻域内既有属于E的点,也有不属于E的点,则称P_0为E的界点或边界点.

上述三个概念中当然以内点最为重要,因为其他两个概念都是由此派生出来的.

定义2 设E是R^n中一点集,P_0为R^n中一定点,如果P_0的任一邻域内部都含有无穷多个属于E的点,则称P_0为E的一个聚点.

显然E之内点必为E之聚点，但E之聚点却不一定是E的内点，因为还可能是E的界点．其次，E之内点一定属于E，但E的聚点则可以属于E也可以不属于E．

定理 1　下面的三个陈述是等价的：

(1) P_0是E的聚点；

(2) P_0的任一邻域内，至少含有一个属于E而异于P_0的点；

(3) 存在E中互异的点所成点列$\{P_n\}$，使$P_n \to P_0 \quad (n\to\infty)$．

证明　由(1)推出(2)及由(3)推出(1)是显然的，现证由(2)推出(3)．

由假定在$U(P_0,1)$中至少有一点P_1属于E而异于P_0，令$\delta_1=\min\left\{d(P_1,P_0),\frac{1}{2}\right\}$，则在$U(P_0,\delta_1)$中至少有一点$P_2$属于$E$而异于$P_0$，令$\delta_2=\min\left\{d(P_2,P_0),\frac{1}{3}\right\}$，则在$U(P_0,\delta_2)$中又至少有一点$P_3$属于$E$而异于$P_0$，这样无限继续下去，便得到点列$\{P_n\}$，它显然满足要求．证毕．

再介绍一个派生的概念：

定义 3　设E是R^n中一点集，P_0为R^n中一定点，如果P_0属于E但不是E的聚点，则P_0称为E的孤立点．

由定理 1 可知：P_0是E的孤立点的充分必要条件是：存在P_0的某邻域$U(P_0)$，使$E\cap U(P_0)=\{P_0\}$．

由此又知：E的界点不是聚点便是孤立点．

既然这样，所有R^n中的点，对E来说又可分为聚点，孤立点，外点三种．故可列表如下：

$$R^n\text{中的点(对}E\text{来说)}\begin{cases}\text{内点，}\\\text{界点，}\\\text{外点}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\text{聚点，}\\\text{孤立点，}\\\text{外点．}\end{cases}$$

注意．对一个具体的点集E来说，上述任何分类中的三种点

不一定都出现．界点或聚点可以属于E，也可以不属于E．

根据上面引入的概念，对于一个给定的点集E，我们可以考虑上述各种点的集合，其中重要的是下面四种．

定义 4 设E是R^n中一个点集，有

(1) E的全体内点所成的集合，称为E的开核，记为$\mathring{E}$；

(2) E的全体界点所成的集合，称为E的边界，记为∂E；

(3) E的全体聚点所成的集合，称为E的导集，记为E'；

(4) $E\cup E'$ 称为E的闭包，记为$\overline{E}$．

闭包也可以表示为其他形式，例如：

$$\overline{E}=E\cup\partial E=\mathring{E}\cup\partial E=E'\cup\{E\text{的全体孤立点}\}.$$

各种说法的本质在于：$\overline{E}$含且仅含R^n中所有这种点P，在P的任一邻域内都至少有一点属于E．

由于闭包的这个特征，立刻可得闭包与开核的对偶关系：

$$\mathring{C}E=\overline{CE},\ \ C\overline{E}=(\mathring{C}E).$$

定理 2 设$A\subset B$，则$A'\subset B'$，$\mathring{A}\subset\mathring{B}$，$\overline{A}\subset\overline{B}$．

定理 3 $(A\cup B)'=A'\cup B'$．

证明 因为$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$，故从定理2，$A'\subset(A\cup B)'$，$B'\subset(A\cup B)'$从而

$$A'\cup B'\subset(A\cup B)'.$$

另一方面，假设$P\in(A\cup B)'$，则必有$P\in A'\cup B'$．否则，若$P\overline{\in}A'\cup B'$，那末将有$P\overline{\in}A'$且$P\overline{\in}B'$．因而有P的某一邻域$U_1(P)$，在$U_1(P)$内除P外不含A的任何点，同时有P的某一邻域$U_2(P)$，在$U_2(P)$内除P外不含B的任何点，则由邻域基本性质(3)知，存在$U_3(P)\subset U_1(P)\cap U_2(P)$，在$U_3(P)$中除$P$点外不含$A\cup B$中的任何点，这与$P\in(A\cup B)'$的假设矛盾．

下面的定理告诉我们什么时候$E'\neq\varnothing$．

定理 4 (Bolzano-Weierstrass定理) **设E是一个有界的无**

限集合，则E至少有一个聚点.

证明方法与一、二维相同.

定理 5 设$E\neq\varnothing$，$E\neq R^n$，则E至少有一界点(即$\partial E\neq\varnothing$)。

证明留作习题.

§3. 开集·闭集·完备集

在本节中我们着重讨论两类特殊点集.

定义 1 设$E\subset R^n$，如果E的每一点都是E的内点，则称E为开集.

例如整个空间R^n是开集，空集也是开集．又如在R^1中任意开区间(a,b)是开集，$[0,1)$不是开集．在R^2中$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是一开集(但把它放在$R^3$中来看时，即看做$E=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<1, z=0\}$就不再是开集了).

定义 2 设$E\subset R^n$，如果E的每一个聚点都属于E，则称E为闭集.

例如整个空间R^n是闭集，空集是闭集．又如在R^1中闭区间$[a,b]$是闭集，但$[0,2)$不是闭集．在R^2中$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$是闭集．再如任意的有限集合都是闭集.

开集、闭集利用开核、闭包等术语来说，就是：

E为开集的充要条件是$E\subset\mathring{E}$，亦即$E=\mathring{E}$；

E为闭集的充要条件是$E'\subset E$(或$\partial E\subset E$).

今后开集常用字母G表示，闭集常用字母F表示.

定理 1 **对任何$E\subset R^n$，$\mathring{E}$是开集，E'和$\bar{E}$都是闭集**($\mathring{E}$称为开核，$\bar{E}$称为闭包的理由也在于此).

证明 设$P\in\mathring{E}$，由$\mathring{E}$的定义存在邻域$U(P)\subset E$，对于任意的$Q\in U(P)$，从邻域基本性质(3)可知，有$V(Q)$使$V(Q)\subset U(P)\subset E$．即$Q$是$E$的内点，故$U(P)\subset\mathring{E}$，所以$P$是$\mathring{E}$的内点，故$\mathring{E}$是开集.

其次证明 E' 为闭集．设 $P_0\in(E')'$，则由§2定理1的(2)，在 P_0 的任一邻域 $U(P_0)$ 内，至少含有一个属于 E' 而异于 P_0 的点 P_1．因为 $P_1\in E'$，于是又有属于 E 的 $P_2\in U(P_0)$，而且还可以要求 $P_2\neq P_0$，再利用§2定理1，即得 $P_0\in E'$．所以 E' 是闭集．

最后证明 $\bar{E}$ 是闭集．因为 $\bar{E}=E\cup E'$，由§2定理3，

$$(\bar{E})'=E'\cup(E')'\subset E'\cup E'=E'\subset\bar{E},$$

从而 $\bar{E}$ 是闭集．证毕．

定理2（开集与闭集的对偶性） **设 E 是开集，则 CE 是闭集；设 E 是闭集，则 CE 是开集．**

证明 第一部份：设 E 是开集，而 P_0 是 CE 的任一聚点，那么，P_0 的任一邻域都有不属于 E 的点．这样，P_0 就不可能是 E 的内点，从而不属于 E（因 E 是开集），也就是 $P_0\in CE$．

第二部份：设 E 是闭集，对任一 $P_0\in CE$，假如 P_0 不是 CE 的内点，则 P_0 的任一邻域内至少有一个属于 E 的点，而且这点又必异于 P_0（因 $P_0\in CE$），这样 P_0 就是 E 的聚点（§2定理1），从而必属于 E（因 E 是闭集），和假设矛盾．

另证，设 E 是开集，则 $E=\mathring{E}$，由闭包、开核对偶关系，得 $\overline{CE}=C\mathring{E}=CE$，可见 CE 是闭集．同样可证另一部份．证毕．

正由于开集和闭集的这种对偶关系，在许多情形下，我们将闭集看作是由开集派生出来的一个概念．也就是说，如果定义了开集，闭集也就随之而确定．

定理3 **任意多个开集之和仍是开集，有限多个开集之交仍是开集．**

证明 第一部份显然，现证第二部份．不妨就两个开集来证明．

设 G_1,G_2 为开集，任取 $P_0\in G_1\cap G_2$．因 $P_0\in G_i$，$i=1,2$，故存在 $U_i(P_0)\subset G_i$，$i=1,2$．由邻域性质(2)，存在 $U_3(P_0)\subset U_1(P_0)\cap$

$U_2(P_0)$，从而 $U_3(P_0)\subset G_1\cap G_2$，可见 P_0 是 $G_1\cap G_2$ 的内点．证毕．

注意，任意多个开集的交不一定是开集．例如，

$$G_n=\left(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right),\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

每个 G_n 是开集，但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n=[-1,1]$ 不是开集．

定理 4　任意多个闭集之交仍为闭集，有限多个闭集之和仍为闭集．

证明　（利用狄莫更公式）设 F_i, $i\in I$（或 $i=1,2,\cdots,m$）是闭集，则由定理 2 知各 CF_i 是开集，从而由定理 3 $\bigcup\limits_{i\in I}CF_i$（或 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}CF_i$）也是开集，但由狄莫更公式有

$$\bigcap_{i\in I}F_i=C\left(\bigcup_{i\in I}CF_i\right)\quad\left(\text{或}\bigcup_{i=1}^{m}F_i=C\left(\bigcap_{i=1}^{m}CF_i\right)\right),$$

故再利用定理 2 便知 $\bigcap\limits_{i\in I}F_i\left(\text{或}\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_i\right)$ 是闭集．证毕．

注意，任意多个闭集的和不一定是闭集．例如，

$$F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right],\quad n=3,4,\cdots,$$

则 F_n 是闭集，而 $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty}F_n=(0,1)$ 不是闭集．

定理 5　(Heine-Borel 有限覆盖定理)　设 F 是一个有界闭集，$\mathscr{M}$ 是一族开集 $\{U_i\}_{i\in I}$ 它覆盖了 F（即 $F\subset\bigcup\limits_{i\in I}U_i$），则 $\mathscr{M}$ 中一定存在有限多个开集 $U_1,U_2,\cdots,U_m$，它们同样覆盖了 F（即 $F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_i$）．

证明　下面的证明方法基本上是属于勒贝格(Lebesgue)的．

我们分两步来证明．不妨假定$\mathscr{M}$中的开集都是开邻域．

（1）先证明存在正数δ，使任一以属于F的x为中心的δ邻域，都将包含在某一个属于$\mathscr{M}$的开集内．设不然，即没有这样的正数δ，则对于任意正整数n，$\frac{1}{n}$都不能取作δ，因而必有$x_n \in F$，使$U\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$不包含在任何属于$\mathscr{M}$的开邻域中．由于$F$有界，$\{x_n\} \subset F$自然也是有界的．如果$\{x_n\}$有无限多个不同元素，则由§2定理4，有聚点$x_0$；如果$\{x_n\}$只有有限多个不同的元素，则至少有一个点$x_0$出现无限多次，因此无论如何，总有$\{x_n\}$的一个子序列$\{x_{n_i}\}$，使$x_{n_i} \to x_0$．注意$F$是闭集，所以$x_0 \in F$．而$\mathscr{M}$复盖$F$，因此有$U \in \mathscr{M}$，使$x_0 \in U$．不妨设$U = U(y_0, \eta)$（图2.1），则有$\eta' > 0$，使$U(x_0, \eta') \subset$

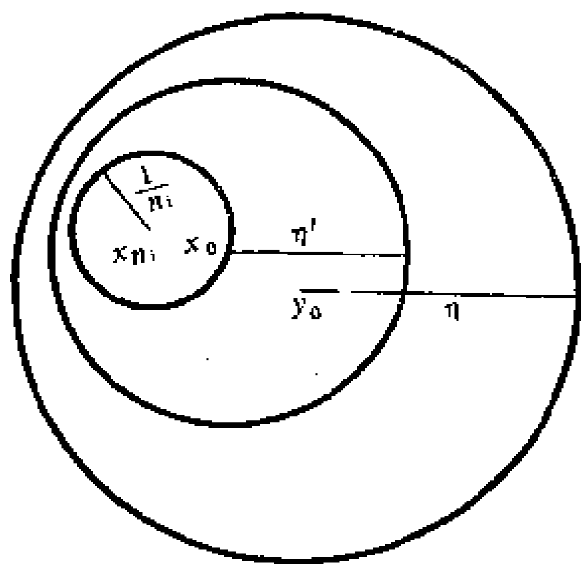


图 2.1

$U(y_0, \eta)$．注意$x_{n_i} \to x_0$，所以可以取n_i充分大，使$d(x_{n_i}, x_0) < \frac{\eta'}{2}$，$\frac{1}{n_i} < \frac{\eta'}{2}$，于是$U\left(x_{n_i}, \frac{1}{n_i}\right) \subset U(x_0, \eta') \subset U(y_0, \eta) \in \mathscr{M}$．这与$x_{n_i}$的定义矛盾．这也就证明了满足所述要求的$\delta$是存在的（这个正数$\delta$，通常称为勒贝格数）．

(2) 因为F有界，我们可以用平行于坐标平面的超平面将F分成有限多个小块，使每一块的直径都小于δ，设这些小块是F_1，$F_2, \cdots, F_m$，在每一F_i中任取一点x_i，作x_i的δ邻域$U(x_i, \delta)$，则应有$U_i \in \mathscr{M}$，使$U(x_i, \delta) \subset U_i$。于是得出属于$\mathscr{M}$的有限多个开集$U_1$，$U_2, \cdots, U_m$。显然$F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$。证毕。

定义 3 设$E \subset R^n$，如果$E \subset E'$，就称E是自密集。换句话说，当集合中每点都是这个集的聚点时，这个集是自密集。另一个说法是没有孤立点的集就是自密集。

例如，空集是自密集，R^1中有理数全体所组成的集是自密集。

定义 4 设$E \subset R^n$，如果$E = E'$，则称E为完备集或完全集。

完备集就是自密闭集，也就是没有孤立点的闭集。

例如，空集是完备集，R^1中的任一闭区间$[a, b]$及全直线都是完备集。

表面上看来，既然一个完备集合一方面是闭集，而另一方面每一点又都是聚点，似乎它就会铺满空间的一小块，但是这是一种错觉。在下一节中，我们将以著名的康托尔(Cantor)集作为例子来说明这一点。

§4. 直线上的开集、闭集及完备集的构造

在本节中我们将讨论直线上（即R^1中）开集与闭集的构造，并详细地讨论康托尔集这一重要例子。

在直线上，开区间是开集。虽然开集一般说来不一定是一个开区间，但容易看出非空开集是一系列开区间的和集。我们现在来研究直线上的开集的结构。为此先引入构成区间的概念。

定义 1 设G是直线上的开集。如果开区间$(\alpha, \beta) \subset G$，而且

端点 α,β 不属于 G，那么称 (α,β) 为 G 的构成区间.

例如，开集 $(0,1)\cup(2,3)$ 的构成区间是 $(0,1)$ 以及 $(2,3)$.

定理 1 （开集的构造） 直线上任一个非空开集可以表示成有限个或可数个互不相交的构成区间的和集．又当非空开集表示成互不相交的开区间的和集时，这些区间必是构成区间.

证明 设 G 是直线上的一个非空开集，分以下几步来论证：

(1) 开集 G 的任何两个不同的构成区间必不相交．不然的话，设 (α_1,β_1)，(α_2,β_2) 是 G 的两个不同的构成区间，但相交．这时必有一个区间的端点在另一个区间内，例如 $\alpha_1\in(\alpha_2,\beta_2)$，但 $(\alpha_2,\beta_2)\subset G$，这和 $\alpha_1\overline{\in}G$ 矛盾．因此不同的构成区间不相交．再由第一章习题第 11 题，开集 G 的构成区间全体最多只有可数个.

(2) 开集中任何一点必含在一个构成区间中．事实上，任意取 $x_0\in G$，记 A_{x_0} 为适合条件 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset G$ 的开区间 (α,β) 全体所成的区间集．因为 G 是开集，A_{x_0} 不会空．记

$$\alpha_0=\inf_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}\alpha,\quad \beta_0=\sup_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}\beta.$$

作开区间 (α_0,β_0)（其实，$(\alpha_0,\beta_0)=\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}}(\alpha,\beta)$）．显然，$x_0\in(\alpha_0,\beta_0)$．现在证明 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间．先证 $(\alpha_0,\beta_0)\subset G$．任意取 $x'\in(\alpha_0,\beta_0)$，不妨设 $x'\leqslant x_0$．由于 α_0 是下确界，所以必有 $(\alpha,\beta)\in A_{x_0}$，使 $\alpha_0<\alpha<x'$，因此

$$x'\in(\alpha,x_0]\subset(\alpha,\beta)\subset G.$$

同样，如果 $x'>x_0$，也可以证明类似的结果．因此 $(\alpha_0,\beta_0)\subset G$．由此顺便得到 $(\alpha_0,\beta_0)\in A_{x_0}$．再证 $\alpha_0\overline{\in}G$．如果不对，那么 $\alpha_0\in G$，因为 G 是开集，必有区间 (α',β')，使得 $\alpha_0\in(\alpha',\beta')\subset G$．这样，$x_0\in(\alpha',\beta_0)\subset(\alpha',\beta')\cup(\alpha_0,\beta_0)\subset G$，因此，$(\alpha',\beta_0)\in A_{x_0}$，而 $\alpha'<\alpha_0$，这就和 α_0 是 A_{x_0} 中的区间左端点的下确界相矛盾．所以 $\alpha_0\overline{\in}G$．同样有 $\beta_0\overline{\in}G$．这就是说 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间.

(3) 作 G 的所有构成区间的和 $\bigcup(\alpha,\beta)$，由(2)它应是 G. 由(1)，G 必定是有限个或可数个互不相交的构成区间的和集. 用 (α_ν,β_ν) ($\nu=1,2,\cdots,n$ 或 $\nu=1,2,\cdots$) 记 G 的构成区间，那么 $G=\bigcup\limits_{\nu}(\alpha_\nu,\beta_\nu)$.

(4) 设 $G=\bigcup\limits_{\nu}(\alpha'_\nu,\beta'_\nu)$ 是一组互不相交的开区间的和集. 现在只要证明每个 (α'_ν,β'_ν) 都是 G 的构成区间. 显然，$(\alpha'_\nu,\beta'_\nu)\subset G$，若它不是构成区间，比方说 $\alpha'_\nu\in G$，那么必有 $\mu\neq\nu$ 使得 $\alpha'_\nu\in(\alpha'_\mu,\beta'_\mu)$ 因而 (α'_ν,β'_ν) 与 (α'_μ,β'_μ) 相交. 这和假设矛盾. 所以 $\alpha'_\nu\overline{\in}G$. 同样 $\beta'_\nu\overline{\in}G$. 所以 (α'_ν,β'_ν) 是构成区间. 证毕.

因此非空开集必然唯一地表示成可数个或有限个互不相交的开区间的和集.

既然闭集的余集是开集，那么从开集的构造可以引入余区间的概念.

定义 2 设 A 是直线上的闭集，称 A 的余集 CA 的构成区间为 A 的余区间或邻接区间.

我们又可以得到闭集的构造如下：

定理 2 直线上的闭集 F 或者是全直线，或者是从直线上挖掉有限个或可数个互不相交的开区间（即 F 的余区间）**所得到的集.**

由孤立点的定义很容易知道，直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此，闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完备集是没有孤立点的闭集，所以，完备集就是没有相邻接的余区间的闭集.

下面我们讨论一个重要的例子——康托尔集.

例 (康托尔集) 将闭区间 $[0,1]$ 三等分，去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，剩下两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$. 又把这两个闭区间各三等分，去掉中间的两个开区间，即 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. 一般地，当

进行到第 n 次时，一共去掉 2^n-1 个开区间，剩下 2^n 个长度是 3^{-n} 的互相隔离的闭区间，而在第 $n+1$ 次时，再将这 2^n 个闭区间各三等分，并去掉中间的一个开区间，如此继续下去，就从[0, 1]去掉了可数个互不相交（而且没有公共端点）的开区间．因此由定理2，剩下的必是一个闭集（它至少包含各邻接区间的端点及其聚点），它称为康托尔集，记为 P．

让我们来考察这个闭集 P 的性质．

1°．**P 是完备集**　由于 P 的邻接区间的作法，它们任何两个之间根本不存在一公共端点，因此 P 是完备集．

2°．**P 没有内点**　事实上，在 P 的作法中讲过，“去掉”手续进行到第 n 次为止时，剩下 2^n 个长度是 3^{-n} 的互相隔离的闭区间，因此任何一点 $x_0\in P$ 必含在这 2^n 个闭区间的某一个里面．从而在 x_0 的任一邻域 $U(x_0, 3^{-n})$ 内至少有一点不属于 P，但 $3^{-n}\to 0(n\to\infty)$，故 x_0 不可能是 P 的内点．

P 既然是没有内点的闭集，那么在（直线上）任一开区间 I 内必至少含有开集 CP 的一点，从而 I 内必至少有一子开区间，其中不含 P 的点．凡是一个点集 E（不限于 R^1 中），如果具有性质：空间任一邻域内至少包含某点的一个邻域，其中不含 E 的点，则称 E 为疏朗集合，或无处稠密集合（E 是疏朗集合的特征是 $\bar{E}$ 没有内点）．因此 P 是一个疏朗集合．

综上所述，我们便可以将康托尔集的特点归纳为一句话：它是一个疏朗的完备集．

最后附带说明一下，当 $n>1$ 时，R^n 中的开集一般不能表示成至多可数个互不相交的开区间（n 维）的和，但总可表示成可数个互不相交的半开半闭（例如左开右闭）区间之和，不过这种表示法没有唯一性（在 R^1 中一个开集只能用一种方式表示成构成区间之和）．今以 $n=2$ 的情形说明于下：

设G为R^2中任一开集. 在R^2上以两族平行线:

$$x=m, \qquad y=n, \quad (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

作成无数个左开右闭的正方形;这些正方形中全部落在G中的,记为$Q_{11}, Q_{12}, \cdots, Q_{1n_1}$; ($n_1$可能是$\infty$), 参见图 **2.2** 再作两族平行线:

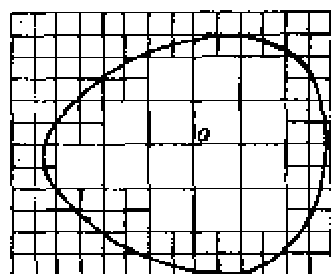


图 2.2

$$x=m+\frac{1}{2}, y=n+\frac{1}{2},$$

$$(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

将所余的每一个正方形分为四个左开右闭的正方形, 记这些正方形之完全落入G中的为Q_{21}, $Q_{22}, \cdots Q_{2n_2}$; (n_2可能是∞). 如此继续进行,陆续添作两族平行线:

$$x=m+\frac{\nu}{2^k}, y=n+\frac{\nu}{2^k},$$

$$(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \nu=1, 2, \cdots, 2^k-1)$$

将尚未在G中之正方形等分为四个左开右闭之正方形,等分后,其能全部落入G中的,把它们记作$Q_{k1}, Q_{k2}, \cdots, Q_{kn_k}$ (n_k可能不是有限的). 于是得正方形的和集

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\nu=1}^{n_k} Q_{k\nu}=S.$$

显然, $S\subset G$. 今证$G\subset S$. 若$P\in G$, 则取k很大时必有边长为$\frac{1}{2^k}$的(上面所作的)正方形含有P点而落入于开集G中. 假如有$Q_{l\nu}$适合

$$l<k, 1\leqslant\nu\leqslant n_\nu, P\in Q_{l\nu},$$

那么$P\in S$, 若不然,则上述边长为$\frac{1}{2^k}$的正方形, 应记它做$Q_{k\nu}$, 因此,

$$P \in Q_{k_s} \subset S,$$

所以 $G \subset S$. 从而 $S = G$.

§5*. 皮亚诺(Peano)曲线

当我们谈到一条“画在平面上的曲线”时，在我们的头脑中便显现出蔓延在平面上的一根细长的线条的形象. 如果我们用集合论的术语便有理由提问：一个平面点集必须具有什么性质才能将它看作位于平面上的一条曲线？

康托尔曾用下面的话来定义平面曲线：

所谓平面曲线是一个连通①的完备集 P，它位于平面上，而且是平面上的疏朗集.

这个定义，曾成为后来许多工作的依据. 但是不能不注意，它并不完全符合我们想象中的蔓延在平面上的细长线条这概念. 例如，我们从一个正方形内去掉可数多个互相分离的开圆，它们是在这正方形内处处稠密地分布着，并且这些圆的圆周互不相交，也不和正方形的边相交，则正方形内部的余留部份，便是在康托尔意义下的一条“曲线”(图 2.3).

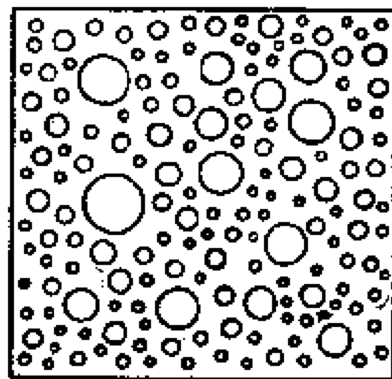


图 2.3

由于康托尔的定义同我们想象的“曲线”概念有些抵触，约当(Jordan)便给出了“曲线”的另一个定义：

一条平面曲线是平面上那些坐标 x 和 y 由方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

---

① 关于连通性的概念我们不能详述，有兴趣的读者可参看 Н. Н. Лузин 著，何旭初等译《实变函数论》，高等教育出版社，1954 年. 或参阅拓扑学著作.

所给出的点的总体，其中φ和ψ是闭区间[0, 1]上的两个连续函数．这样的曲线称为连续曲线．或连续弧

根据这个定义，若把变数t了解为"时间"，则当t由0增到1时，两个函数$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$所给定的点$M(x,y)$在平面上移动画成一条"弯曲的线"，它是一条连续曲线．约当所下的定义也和康托尔的定义一样精确，而且也曾被用来作为许多工作的依据．当函数φ和ψ有连续的导数φ'和ψ'时，连续曲线$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$就真的是一根细长的线条，并且还有确定的长度s：

$$s=\int_0^1\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

然而，在1890年意大利数学家皮亚诺发现：在适当地选择连续函数φ和ψ时，连续曲线$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，可以"填满一个正方形"．下面我们将简略地介绍能填满一个正方形内部的皮亚诺曲线．

设S是一区间（一维），Q是一正方形，g是大于1的整数（在皮亚诺(1890年)的作法中，$g=3$；希尔伯特(Hilbert)(1891年)取$g=2$，见图2.4）．将S等分为g^2个小区间

$$S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, \cdots, S_{g^2}^{(1)},$$

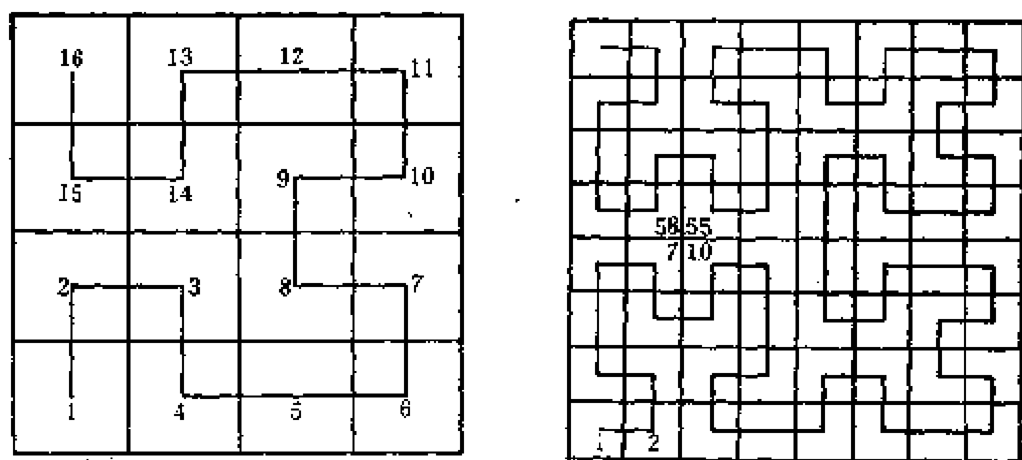


图 2.4

其中 $S_\nu^{(1)}$ 的右端就是 $S_{\nu+1}^{(1)}$ 的左端. 又将 Q 等分为 g^2 个小正方形

$$Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, \cdots, Q_{g^2}^{(1)},$$

其中 $Q_\nu^{(1)}$ 与 $Q_{\nu+1}^{(1)}$ 有共同边. 其次, 将 $S_k^{(1)}$ 等分为 g^2 个小区间

$$S_{(k-1)g^2+1}^{(2)}, S_{(k-1)g^2+2}^{(2)}, \cdots, S_{kg^2}^{(2)}, \quad (k=1, 2, \cdots, g^2).$$

于是, S 被等分为 g^4 个小区间 $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \cdots, S_{g^4}^{(2)}$; 其中 $S_\nu^{(2)}$ 与 $S_{\nu+1}^{(2)}$ 有共同点. 又将 Q 等分为 g^4 个小正方形 $Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}, \cdots, Q_{g^4}^{(2)}$, 其中 $Q_{(k-1)g^2+1}^{(2)}, \cdots, Q_{kg^2}^{(2)}$ 都在 $Q_k^{(1)}$ 之中, $Q_\nu^{(2)}$ 与 $Q_{\nu+1}^{(2)}$ 有共同边. 此手续进行至 n 次时, S 等分为 g^{2n} 个小区间

$$S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \cdots, S_{g^{2n}}^{(n)} \qquad (S_\nu^{(n)} \text{ 与 } S_{\nu+1}^{(n)} \text{ 有共同端点}).$$

Q 等分为 g^{2n} 个小正方形

$$Q_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, \cdots, Q_{g^{2n}}^{(n)},$$

其中

$$Q_{(k-1)g^2+1}^{(n)}, Q_{(k-1)g^2+2}^{(n)}, \cdots, Q_{kg^2}^{(n)}$$

由等分 $Q_k^{(n-1)}$ 而得, $Q_\nu^{(n)}$ 与 $Q_{\nu+1}^{(n)}$ 有共同边.

今将 S 中任意一点 a 用下述映照法映入 Q 之一点 b. 若 $a \in S_k^{(n)}$, 则使 $b \in Q_k^{(n)}$. 假如 a 不是任何 $S_k^{(n)}$ 的左端或右端, 则必为一列小区间的内点. 因之有 $k_1, k_2, \cdots$ 如下:

$$S_{k_1}^{(1)} \supset S_{k_2}^{(2)} \supset \cdots,$$

a 为 $S_{k_n}^{(n)}$ 的内点. 因之 $Q_{k_1}^{(1)} \supset Q_{k_2}^{(2)} \supset \cdots$. 当 $n \to \infty$ 时, $Q_{k_n}^{(n)}$ 收敛于 b. 假如 a 是 $S_{k_n}^{(n)}$ 的左端或右端, 那么 a 也是 $S_{k_{n+p}}^{(n+p)}$ $(p>0)$ 的左端或右端.

若 a 不是 S 的左端或右端, 则对于任一 p, a 为相邻两区间 $S_{k_{n+p}}^{(n+p)}$ 与 $S_{k_{n+p}+1}^{(n+p)}$ 的共同端点. 由

$$S_{k_n}^{(n)} \cup S_{k_{n+1}}^{(n)} \supset (S_{k_{n+1}}^{(n+1)} \cup S_{k_{n+1}+1}^{(n+1)}) \supset \cdots$$

得

$$Q_{k_n}^{(n)} \cup Q_{k_{n+1}}^{(n)} \supset (Q_{k_{n+1}}^{(n+1)} \cup Q_{k_{n+1}+1}^{(n+1)}) \supset \cdots.$$

当 $n \to \infty$ 时, $Q_{k_n}^{(n)} \cup Q_{k_n+1}^{(n)}$ 收敛于 b.

今证当 a 从 S 的左端逐渐移动到 S 的右端时，a 的象 b 填满了 Q 中所有的点，记上述之映照为 φ，则对于 S 中任意一点 a，Q 中有 b 适合于 $b=\varphi(a)$. 又设 b 是 Q 的任意一点，则必有如下的 $Q_{k_n}^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$

$$b\in Q_{k_{n+1}}^{(n+1)}\subset Q_{k_n}^{(n)}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因之 $S_{k_n}^{(n)}\supset S_{k_{n+1}}^{(n+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$. 当 $n\to\infty$ 时 $S_{k_n}^{(n)}$ 收敛于 S 中的一点 a，此即 b 的原象. 所以 $b=\varphi(a)$ 充满了 Q.

$b=\varphi(a)$ 是一连续映照的证明我们不再详述①

当 $g=2$ 时，将 Q 十六等分与六十四等分的情形，如图 2.4 所示. 当六十四等分正方形时，其中 7, 10, 55, 58 四个正方形有一共同点. 由此可知此点的原象不止一个. 一般而论，对于 Q 的一点 b，含有 b 的 $Q_{k_n}^{(n)}(n=1,2,\cdots)$ 不止一个. 设 $b\in Q_{k_n}^{(n)}$，$b\in Q_{k'_n}^{(n)}(k_n\neq k'_n)$，则 $\{S_{k_n}^{(n)}\}$ 与 $\{S_{k'_n}^{(n)}\}$ 所决定之点可以不同.

第二章 习 题

1. 证明 $P_0\in E'$ 的充要条件是对任意含有 P_0 的邻域 $U(P,\delta)$（不一定以 P_0 为中心）中，恒有异于 P_0 的点 P_1 属于 E（事实上，这样的 P_1 还有无穷多个）. 而 $P_0\in\mathring{E}$ 的充要条件则是有含有 P_0 的邻域 $U(P,\delta)$（同样，不一定以 P_0 为中心）存在，使 $U(P,\delta)\subset E$.

2. 设 $R^n=R^1$ 是全体实数，E_1 是[0, 1]上的全部有理点，求 E_1'，$\mathring{E}_1$，$\bar{E}_1$.

3. 设 $R^n=R^2$ 是普通的 xOy 平面，$E_2=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\}$. 求 E_2'，$\mathring{E}_2$，$\bar{E}_2$.

4. 设 $R^n=R^2$ 是普通的 xOy 平面，E_3 是函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & \text{当 } x\neq0\\ 0 & \text{当 } x=0\end{cases}$$

的图形上的点所作成的集合，求 E_3'，$\mathring{E}_3$.

5. 在 R^2 中看第 2 题之 E_1'，$\mathring{E}_1$，$\bar{E}_1$ 各是由哪些点构成的.

---

① 有兴趣的读者可以参看陈建功著《实函数论》，科学出版社，1960年.

6. 证明点集 F 为闭集的充要条件是 $\overline{F}=F$.

7. 证明开集减闭集后的差集仍是开集；闭集减开集后的差集仍是闭集.

8. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的实值连续函数，则对于任意常数 a，$E=\{x|f(x)>a\}$ 是一开集，而 $E=\{x|f(x)\geqslant a\}$ 总是一闭集.

9. 证明每个闭集必是可数个开集的交集；每个开集可以表示成可数个闭集的和集.

10. 证明用十进位小数表示 $[0,1]$ 中的数时，其用不着数字 7 的一切数成一完备集.

11. 证明 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续函数的充分必要条件是对任意实数 c，集 $E=\{x|f(x)\geqslant c\}$ 和 $E_1=\{x|f(x)\leqslant c\}$ 都是闭集.

12. 证明§2 定理 5.

第三章 测 度 论

测度概念在 R^1 中是长度概念的推广，在 R^2 中是面积概念的推广，而且可以越出 R^n 在抽象空间定义测度. 测度论不只是近代积分论的基础，在其它数学分支（例如泛函分析，概率论）里也有广泛的应用. 我们在本章中主要介绍勒贝格(Lebesgue) 测度（简称 L测度），L 测度可以有不同的讲法，例如可以先建立勒贝格 积分理论，再由此导出 L 测度理论，还有泛函分析中的达尼尔(Daniel)方法等. 但是为了直观性，也为了更好地联系一般测度理论，我们先介绍约当测度和黎曼积分、外测度内测度等概念，然后采用卡拉皆屋铎利(Carathéodory)的方法在点集论基础上直接定义 R^n 中 L 测度，再把 L 积分建立在 L 测度基础之上.

§1. 约当(Jordan)测度

在求面积、体积问题上，数学分析比初等几何大大前进了一步. 它能够对相当广泛的一类平面（空间）图形定义并计算它的面积（体积），例如"曲线" $y=f(x)\geq 0$（$f(x)$是在$[a,b]$上黎曼(Rieman)可积函数（简记为 R 可积函数））下的"曲边梯形" 的面积 S 可通过积分来定义：

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

又如对于更一般的平面点集 E，当其"特征函数"

$$\varphi_E(x,y)=\begin{cases}1, & 当\ (x,y)\in E,\\ 0, & 当\ (x,y)\notin E\end{cases}$$

(R)可积时，E 的面积 S 可通过二重积分来定义：

$$S=\iint_K \varphi_E(x,y)\,dx\,dy,$$

其中K为包含E的矩形. 所有这种能凭R积分定义的量度（面积也好，体积也好），确切些说，应该称2维或3维的约当测度，它可以不依赖于积分概念而在点集论的基础上直接加以定义，而且反过来为(R)积分服务. 因此约当测度可以说是(R)积分的几何基础. 为了更好地理解L测度本身及其历史背景，扼要地叙述一下约当测度的大意是值得的（为了不分散对L测度的注意，关于约当测度的某些证明从简）. 以下所说点集都是指R^n中的点集而言.

在初等几何中，圆面积定义为包含圆的外切多边形的面积与含于圆内的内接多边形的面积的共同确界（分别为下确界和上确界）. 在数学分析中，曲边梯形的面积（定积分）定义为包含曲边梯形的阶梯形面积（大和）与含于曲边梯形内的阶梯形面积（小和）的共同确界（大和的下确界与小和的上确界）. 它们的共同想法启发我们给出下述定义：

定义 1 设E为一有界点集. 对于每一组覆盖E的开区间$\{I_i\}$ $i=1,2,\cdots,s$（s是任一自然数），$\bigcup_{i=1}^{s} I_i\supset E$，各作出它们的体积总和$\mu=\sum_{i=1}^{s}|I_i|$（不同的区间组一般有不同的$\mu$），所有这些$\mu$显然构成一个下方有界的数集，它的下确界（由$E$完全确定）称为$E$的约当外测度. 记为$(m^*E)_J$，即

$$(m^*E)_J=\inf\left\{\sum_{i=1}^{s}|I_i|\;\middle|\;\bigcup_{i=1}^{s}I_i\supset E,\ I_i\text{为开区间},\ s\text{为任何自然数}\right\}.$$

定义 2① 设E为一有界点集，对于每一组含于E的互不相交的开区间$\{I_i\}$ $i=1,2,\cdots,s$(s是任一自然数)，$\bigcup_{i=1}^{s} I_i \subset E$，各作出它们的体积总和$\nu=\sum_{i=1}^{s}|I_i|$(不同区间组一般有不同的$\nu$)，所有这些$\nu$构成一上方有界的数集，它的上确界(由$E$完全确定)称为$E$的约当内测度②，记为$(m_*E)_J$．即

$$(m_*E)_J=\sup\left\{\sum_{i=1}^{s}|I_i| \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{s} I_i \subset E,\text{且 } I_i\cap I_j=\varnothing,(i\neq j),\right.$$
$$\left. I_i\text{ 为开区间}, s\text{ 为任何自然数}\right\}.$$

不难证明：对上述定义中用到的μ和ν，总有$\nu\leqslant\mu$，因此总有

$$(m_*E)_J\leqslant(m^*E)_J.$$

定义 3 设E为有界点集，如果$(m^*E)_J=(m_*E)_J$，则称E为约当可测(以后简记为J可测)，而其相同的内、外约当测度就称为E的约当测度，记为$(mE)_J$，即

$$(mE)_J=(m_*E)_J=(m^*E)_J.$$

并不是每一个有界集都是约当可测的．例如单位区间中全体有理点所组成的点集E，就不是J可测的．事实上，易证E的约当外测度为1，而约当内测度为0，从而$(m^*E)_J\neq(m_*E)_J$．

下面将约当测度表成R积分的形式．

---

① 定义1及定义2中采用开区间并不是本质的，将它们换成闭区间或半开半闭区间均无不可，又在内测度定义中如换用闭区间时原来"不相交"的条件可换成无公共内点．

② E的约当内测度的一个等价定义是

$$(m_*E)_J=|I|-(m^*(I-E))_J,$$

这里I是任何包含E的区间．

设E为一有界集，K为一区间且有$E\subset K$，定义E的特征函数$\varphi_E(P)$：

$$\varphi_E(P)=\begin{cases}1, & \text{当 } P\in E,\\ 0, & \text{当 } P\in K-E\end{cases}.$$

用平行于坐标面的超平面将K分割为有限个小区间I_i，令$M_i=\sup\limits_{P\in I_i}\varphi_E(P)$，$m_i=\inf\limits_{P\in I_i}\varphi_E(P)$，则

$$(m^*E)_J=\inf\left(\sum_{I_i\cap E=\phi}0\cdot|I_i|+\sum_{I_i\subset E}1\cdot|I_i|+\sum_{\substack{I_i\cap E\neq\phi\\ I_i\not\subset E}}1\cdot|I_i|\right)$$

$$=\inf\left(\sum_{I_i\cap E=\phi}M_i\cdot|I_i|+\sum_{I_i\subset E}M_i\cdot|I_i|+\sum_{\substack{I_i\cap E\neq\phi\\ I_i\not\subset E}}M_i\cdot|I_i|\right)$$

$$=\overline{\iint_K}\varphi_E(P)dV.$$

（这一式子的几何意义是明显的，严格证明也不甚难，但需费一些笔墨，这里从简）。

同理

$$(m_*E)_J=\underline{\iint_K}\varphi_E(P)dV.$$

从而E为J可测等价于$\varphi_E(P)$在K上黎曼可积，且

$$(mE)_J=\iint_K\varphi_E(P)dV.$$

我们把这一结果叙述为：

定理 1 有界点集E约当可测的充要条件是$\varphi_E(P)$在一包含E的区间K上(R)可积，且

$$(mE)_J=\iint_K\varphi_E(P)dV.$$

定理 2 有界点集E是J可测的充要条件是：E的边界∂E是

一个 J 外测度为 0 的点集(这时 ∂E 当然 J 可测且其 J 测度也为 0),即 $(m^*\partial E)_J=0$.

证明 由定理 1,有界点集 E 是 J 可测的充要条件是 $\varphi_E(P)$ 在一包含 E 的区间 K 上 (R) 可积. 而由可积的充要条件知,对于任给 $\varepsilon>0$,有 K 的分划,使 $\sum\limits_i \omega_i |I_i|<\varepsilon$, 其中

$$\omega_i=M_i-m_i,\quad m_i=\inf\varphi_E(I_i),\ M_i=\sup\varphi_E(I_i).$$

显然,

$$\partial E\subset \bigcup_{\substack{I_i\cap E\neq\phi\\ I_i\not\subset E}} I_i$$

从而

$$(m^*\partial E)_J\leqslant\sum_{\substack{I_i\cap E\neq\phi\\ I_i\not\subset E}}|I_i|=\sum_{I_i\cap E=\phi}0\cdot|I_i|+\sum_{I_i\subset E}0\cdot|I_i|+\sum_{\substack{I_i\cap E\neq\phi\\ I_i\not\subset E}}|I_i|$$

$$=\sum_i\omega_i|I_i|<\varepsilon.$$

故

$$(m^*\partial E)_J=0.$$

容易证明,定理所述条件也是充分的.

根据定理 2, 或直接根据定义可以验证: 任一区间的 J 可测性,而且 $(mI)_J=|I|$.

定理 3 **设 A、B 为 J 可测集,则 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ 都是 J 可测集**(满足这一性质的集合类通常称为集合环).

证明 设 K 为区间, A、$B\subset K$,因 A、B 均 J 可测, 故 $\varphi_A(P)$, $\varphi_B(P)$ 为 K 上的 (R) 可积函数,从而 $\varphi_A(P)\cdot\varphi_B(P)$ 亦为 K 上的 (R) 可积函数. 而

$$\varphi_{A\cup B}(P)=\varphi_A(P)+\varphi_B(P)-\varphi_A(P)\cdot\varphi_B(P),$$

$$\varphi_{A\cap B}(P)=\varphi_A(P)\cdot\varphi_B(P),$$

$$\varphi_{A-B}(P)=\varphi_A(P)-\varphi_A(P)\cdot\varphi_B(P).$$

故 $\varphi_{A\cup B}(P)$, $\varphi_{A\cap B}(P)$, $\varphi_{A-B}(P)$均为K上的(R) 可积函数. 由定理 1 知 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ 都是 J 可测集.

定理 4 (可加性)设 A, B 为 J 可测集且无公共内点，则

$$(m(A\cup B))_J=(mA)_J+(mB)_J$$

定理的真实性由定理 1、3 立即可得.

§2. 外 测 度

由 J 可测集及其测度的性质易知: 任意有限多个 J 可测集E_1, E_2, …, E_s的并集$\bigcup_{i=1}^{s} E_i$仍为 J 可测, 且当它们互不相交时有 $(m\bigcup_{i=1}^{s} E_i)_J=\sum_{i=1}^{s}(mE_i)_J$, 但对于一列 J 可测集$\{E_i\}$来说, 一般就不能保证并集$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$的 J 可测性,即使它有界(例如[0, 1]中全体有理点, 虽然每点都 J 可测, 但其并却不是 J 可测的), 因此我们说 J 测度只具有有限可加性. 由于 J 测度与(R) 积分的密切关系, J 测度的这种局限性也反映到(R)积分上来. 我们知道, $[a, b]$上任意有限多个(R)可积函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_s(x)$ 的和仍为(R)可积, 且

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{s} f_i(x)\,dx=\sum_{i=1}^{s}\int_a^b f_i(x)dx.$$

但对于一列(R)可积函数$\{f_i(x)\}$来说, 即使$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$有界, 一般仍不能保证$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$的$(R)$可积性. 因此, 为了克服$(R)$积分的这种局限性, 人们自然要求将 J 测度扩充为一个具有可数可加性的测度, 那就是设法在某一集合类Ω上定义非负集合函数 μ, 这集合类

对于作可数并、作交、及作差的运算，具有封闭性(即当 $E_i\in\Omega$, $i=1,2,\cdots$, 时 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\Omega$, $E_1\cap E_2\in\Omega$, $E_1-E_2\in\Omega$)，而且当 E_i 互不相交时，

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

在下一节中我们将看到这种扩充是可能的. 现在姑且假定它可能，在这样前提下，让我们来分析一下，看 μE 最多能有多大，这里 E 是 Ω 中任一集合.

首先容易看到：当 A、$B\in\Omega$ 且 $A\subset B$ 时，总有 $\mu A\leqslant\mu B$①.

其次，设 $\{I_i\}$ 是任一列覆盖 E 的开区间：$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，那么，由上述性质及测度的可数可加性易知 $\mu(E)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|$②. 因此 μE 必不可能大于所有这种和数的下确界，即

$$\mu E\leqslant\inf_{E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i}\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|.$$

---

① 事实上，因为 $A\subset B$，从而 $B=A\cup(B-A)$，在此 $A\cap(B-A)=\varnothing$，故由 μ 的可加性，得 $\mu B=\mu A+\mu(B-A)$，但 $\mu(B-A)\geqslant0$，所以 $\mu A\leqslant\mu B$.

② 事实上，由于 I_i 为 J 可测集，而 Ω 中包含 J 可测集，故 $I_i\in\Omega(i=1,2,\cdots)$，从而 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\in\Omega$，因此有 $\mu E\leqslant\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i)$，但 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i=I_1\cup(I_2-I_1)\cup(I_3-(I_1\cup I_2))\cup\cdots$，这里各被加项皆属于 Ω 且互不相交，故

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i)=\mu I_1+\mu(I_2-I_1)+\mu(I_3-(I_2\cup I_1))+\cdots,$$

从而 $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu I_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|$，所以 $\mu E\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|$.

这样我们就得到了 μE 的一个上界. 在此虽然假定了 $E\in\Omega$, 但上式右边显然对于 R^n 中任一点集均有意义, 这就导致了下面的概念.

定义 1 设 E 为 R^n 中任一点集, 对于每一列覆盖 E 的开区间[①], $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$, 作出它的体积总和 $\mu=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$ (μ 可以等于 $+\infty$, 不同的区间列一般有不同的 μ), 所有这一切的 μ 组成一个下方有界的数集[②], 它的下确界(由 E 完全确定)称为 E 的勒贝格外测度, 简称 **L** 外测度或外测度, 记为 m^*E, 即

$$m^*E=\inf_{E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i}\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|.$$

比较一下 J 外测度和 L 外测度的定义, 立刻发现它们唯一不同处在于前者只是采用了有限多个开区间作覆盖, 而后者却采用了可数多个开区间作覆盖, 这一"量变"就产生了深刻的"质变", 它在下面要讲的外测度性质(3)中将表现出来.

利用 L 外测度的概念, 我们就可以把刚才分析的结果叙述成:

如果 J 测度可以扩充成某一集合类 Ω 上定义的具有可数可加性的测度 μ, 那么对于任一 $E\in\Omega$, 必然有 $\mu E\leqslant m^*E$.

外测度具有以下三条基本性质:

定理 1 (1) $m^*E\geqslant 0$, 当 E 为空集时, 则 $m^*E=0$;

(2) 设 $A\subset B$, 则 $m^*A\leqslant m^*B$; (单调性)

(3) $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} m^*A_i$. (次可数可加性)

---

① 它也可以是有限序列, 因为某些 I_i 也可以是空集.

② 这里的数可以是 $+\infty$. 今后我们把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 看作广义实数, $+\infty$ 比任何有限实数都大, $-\infty$ 比任何有限实数都小.

证明 (1) 显然成立.

(2) 的证明: 设 $A\subset B$, 则任一列覆盖 B 的开区间 $\{I_i\}$ 一定也是覆盖 A 的, 因而

$$m^*A\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|,$$

对所有能覆盖 B 的开区间列取下确界即得

$$m^*A\leqslant\inf_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\supset B}\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|=m^*B.$$

(3) 的证明: 任给 $\varepsilon>0$, 由外测度定义, 对每个 n 都应有一列开区间 $I_{n,1},I_{n,2},\cdots,I_{n,m},\cdots$, 使 $A_n\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}I_{n,m}$, 且

$$\sum_{m=1}^{\infty}|I_{n,m}|\leqslant m^*A_n+\frac{\varepsilon}{2^n}$$

(因 m^*A_n 可能 $=+\infty$, 故用"$\leqslant$"). 从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n,m=1}^{\infty}I_{n,m}$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty}|I_{n,m}|&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|I_{n,m}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*A_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\varepsilon.\end{aligned}$$

可见

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{m,n=1}^{\infty}|I_{n,m}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，即得

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n.$$

注意，性质(3)是 J 外测度所不具备的．并注意到"可数覆盖"所起的作用．

例 1　设 E 为$[0,1]$中的全体有理数，则 $m^*E=0$.

事实上，对任给 $\varepsilon>0$，设 $E=\{r_1, r_2, \cdots\}$，令

$$I_i=\left(r_i-\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, r_i+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right),$$

则 $|I_i|=\frac{\varepsilon}{2^i}$，且

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

而

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon,$$

$$m^*E\leqslant\inf\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|,$$

所以

$$m^*E=0.$$

例 2　对于区间 I 有 $m^*I=|I|$

证明　(1) 设 I 为闭区间

对于任给 $\varepsilon>0$，存在开区间 I'，使得 $I\subset I'$ 且

$$|I'|<|I|+\varepsilon.$$

由外测度定义 $m^*I<|I|+\varepsilon$，由 ε 的任意性，故有

$$m^*I\leqslant|I|.$$

现在来证明 $m^*I\geqslant|I|$．对于任给 $\varepsilon>0$，存在一列开区间$\{I_i\}$ 使 $I\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*I+\varepsilon$.

由有限覆盖定理，在$\{I_i\}$中存在有限多个区间，不妨设就是

$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 使得 $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$.

因为 $I = \bigcup_{i=1}^{n} (I \cap I_i)$, 于此 $I \cap I_i$ 为区间, 由初等几何易知

$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |I \cap I_i| ①,$$

故

$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |I \cap I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^* I + \varepsilon.$$

由于 ε 的任意性, 即得

$$m^* I \geqslant |I|.$$

于是 $m^* I = |I|$.

(2) 设 I 为任意区间, 作闭区间 I_1 及 I_2 使 $I_1 \subset I \subset I_2$ 且

$$|I_2| - \varepsilon < |I| < |I_1| + \varepsilon$$

(I_2 可取为 I 的闭包 $\bar{I}$), 则

$$|I| - \varepsilon \leqslant |I_1| = m^* I_1 \leqslant m^* I \leqslant m^* I_2 = |I_2| < |I| + \varepsilon$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$m^* I = |I|.$$

§ 3. 可 测 集

在前节我们曾假定 J 测度可扩充成具有可数可加性的测度 μ (定义在集合类 Ω 上). 在此前提下, 我们找到了 μE 的一个上界, 那就是 E 的外测度, 现在再来求 μE 的一个下界, 这里 E 是 Ω 中任一有界集.

设 I 为任一包含 E 的开区间: $E \subset I$, 那么根据 μ 的可加性, 易

---

① 以 R^2 的情形为例: 在 I 中延长所有 $I \cap I_i$ 各边, 将 I 分解成有限多个无公共内点的小区间, 且每一个小区间至少包含在某一个 $I \cap I_i$ 中.

知 $\mu E = |I| - \mu(I-E)$，但因 $\mu(I-E) \leqslant m^*(I-E)$，故有

$$\mu E \geqslant |I| - m^*(I-E).$$

这样我们就得到了 μE 的一个下界，即 $|I| - m^*(I-E)$.

在此虽然假定了 $E \subset \Omega$，但 $|I| - m^*(I-E)$ 对 R^n 中任何有界集 E 及 $I \supset E$ 显然都有意义. 它表面上虽然依赖于 I，但不难证明它和 I 的选择实质上是无关的(这一证明实际上包含在本章附录，可测集两个定义的等价性的证明中). 因此可引入下面的概念.

定义 1 设 E 为 R^n 中有界集，I 为任一包含 E 的开区间，则

$$|I| - m^*(I-E)$$

称为 E 的内测度，记为 $m_* E$.

注意，由于 $m^* I = |I|$ 及外测度的单调性和次可加性总有 $m_* E \geqslant 0$ 及 $m_* E \leqslant m^* E$. 这样一来，对于 Ω 中所有有界集 E，我们又掌握了它的一个下界——$m_* E$，因此，对于 Ω 中所有满足 $m^* E = m_* E$ 的有界集就一定有

$$\mu E = m_* E = m^* E. \tag{1}$$

不要忘记，直到目前为止，我们还不曾证明上述 Ω 及其上定义的测度 μ 的存在，我们的任务正是要从无到有地来建立这种测度，但是以上的分析至少说明一件重要的事实，那就是：对于 R^n 中所有满足条件 $m^* E = m_* E$ 的有界集 E，如果能给它们定义一个可列可加测度 μ，且对 J 可测集其 J 测度就等于 μ 测度，那么就只能唯一地按公式(1)来定义. 它给我们提供了解决问题的线索，即我们可以从上述的那类有界集出发，来确定一个集合类 Ω(它将包含一些无界集)①，并在其上直接定义 $\mu E = m^* E$，然后来检验它是否满足要求，下面就依这计划来进行.

---

① 对于一个无界集 E，$E \in \Omega$ 当且仅当 E 与任何开区间 I 的交 $E \cap I \in \Omega$，但 $E \cap I$ 是有界集，故只要知道了 Ω 中所有的有界集，则 Ω 中所有的无界集也知道了.

定义 2 设E为R^n中有界集，如果$m^*E=m_*E$，则称E是L可测的．又设E是R^n中的无界集，如果对任何开区间I，有界集$E\cap I$都是L可测的，则称E是L可测的．对于L可测集E，不管它有界或无界一律称m^*E为它的L测度，简记为mE．L可测集有时也简称可测集．

以上是勒贝格原来下的定义．

由于定义中有界集与无界集受到不同的对待，而且同时出现内外两种测度，使用起来很不方便，所以我们还希望有一个形式上比较简洁的等价定义．

下面这个等价定义是由卡拉皆屋铎利给出的．

定义 3 设E为R^n中的点集，如果对任一点集T都有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE),$$

则称E是L可测的．这时E的L外测度m^*E即称为E的L测度，记为mE．

这个定义没有前述定义的缺点，因此我们以后就取它作为集合E可测的正式定义．定义 2 与定义 3 等价性的证明见本章附录．

以下便根据定义 3 来推导L测度的性质，包括验证它确实满足我们的要求．

定理 1 **集合E可测的充要条件是对于任意$A\subset E$，$B\subset CE$，总有**

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明 必要性：取$T=A\cup B$，则$T\cap E=A$，$T\cap CE=B$，所以

$$m^*(A\cup B)=m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)$$
$$=m^*A+m^*B.$$

充分性：对于任意T，令$A=T\cap E$，$B=T\cap CE$，则$A\subset E$，$B\subset CE$，且$A\cup B=T$，因此

$$m^*T=m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$
$$=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE).$$

定理 2 S 可测的充要条件是 CS 可测.

证明 事实上,对于任意的 T

$$m^*T=m^*(T\cap S)+m^*(T\cap CS)$$
$$=m^*(T\cap C(CS))+m^*(T\cap CS).$$

定理 3 设 S_1,S_2 都可测,则 $S_1\cup S_2$ 也可测,并且当 $S_1\cap S_2=\varnothing$ 时,对于任意集合 T 总有

$$m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]=m^*(T\cap S_1)+m^*(T\cap S_2).$$

证明 首先证明 $S_1\cup S_2$ 的可测性,即要证对任何 T 有

$$m^*T=m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]+m^*[T\cap C(S_1\cup S_2)]. \tag{1}$$

事实上,因 S_1 可测,故对任何 T 有

$$m^*T=m^*(T\cap S_1)+m^*(T\cap CS_1). \tag{2}$$

又因为 S_2 可测,故右边第二项可写成

$$m^*(T\cap CS_1)=m^*[(T\cap CS_1)\cap S_2]+m^*[(T\cap CS_1)\cap CS_2)],$$

代入(2)得

$$m^*(T)=m^*(T\cap S_1)+m^*[(T\cap CS_1)\cap S_2]$$
$$+m^*[(T\cap CS_1)\cap CS_2]. \tag{3}$$

由狄莫更公式,(3)右边第三项可写为 $m^*[T\cap C(S_1\cup S_2)]$,又因 S_1 可测,且 $T\cap S_1\subset S_1$, $(T\cap CS_1)\cap S_2\subset CS_1$, 故由定理 1,(3)式右边第一、二两项可合并为

$$m^*(T\cap S_1)+m^*[(T\cap CS_1)\cap S_2]=m^*[T\cap(S_1\cup(CS_1\cap S_2)]$$
$$=m^*[T\cap(S_1\cup S_2)],$$

所以最后得(1)式:

$$m^*T=m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]+m^*[T\cap C(S_1\cup S_2)].$$

其次当 $S_1\cap S_2=\varnothing$ 时,因 S_1 可测,且 $T\cap S_1\subset S_1$, $T\cap S_2\subset CS_1$,故由定理 1 有

$$m^*[T\cap(S_1\cup S_2)]=m^*(T\cap S_1)+m^*(T\cap S_2).$$

推论 1 设 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可测，则 $\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ 也可测，并且当 $S_i\cap S_j=\varnothing \quad (i\neq j)$ 时，对于任意集合 T 总有

$$m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n} S_i))=\sum_{i=1}^{n} m^*(T\cap S_i).$$

定理 4 设 S_1, S_2 都可测，则 $S_1\cap S_2$ 也可测.

证明 因有 $S_1\cap S_2=C[C(S_1\cap S_2)]=C[CS_1\cup CS_2]$，故应用定理 2 与定理 3 即得.

推论 2 设 $S_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 都可测，则 $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ 也可测.

定理 5 设 S_1、S_2 都可测，则 S_1-S_2 也可测.

证明 因为 $S_1-S_2=S_1\cap CS_2$，故应用定理 2 与定理 4 即得.

定理 6 设 $\{S_i\}$ 是一列互不相交的可测集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集，且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} mS_i \tag{1}$$

证明 首先证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 的可测性. 因由推论 1，对任何 n，$\bigcup_{i=1}^{n} S_i$ 可测，故对于任意 T 总有

$$m^*T=m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right]+m^*\left[T\cap C\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right]$$

$$\geqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)\right]+m^*\left[T\cap C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right]$$

（外测度性质(2)）

$$=\sum_{i=1}^{n} m^*(T\cap S_i)+m^*\left[T\cap C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right]$$

（推论 1）

令 $n\to\infty$ 得

$$m^*T\geqslant\sum_{i=1}^{\infty} m^*(T\cap S_i)+m^*\left[T\cap C\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)\right] \tag{2}$$

由于外测度性质(3)，故有

$$m^*T\geqslant m^*[T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)]+m^*[T\cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)]$$

另一方面由于

$$T=(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i))\cup(T\cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)),$$

又有

$$m^*T\leqslant m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i))+m^*(T\cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)),$$

因此

$$m^*T=m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i))+m^*(T\cap C(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)).$$

这就证明了 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 的可测性.

在(2)式中，令 $T=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$，这时由于$(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)\cap S_i=S_i$，便得

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty} mS_i.$$

另一方面由外测度性质(3)有

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} mS_i,$$

故(1)式成立.

推论 3　设$\{S_i\}$是一列可测集合，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集合.

证明 因 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 可表示为被加项互不相交的和:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = S_1 \cup (S_2 - S_1) \cup [S_3 - (S_1 \cup S_2)] \cup$$

$$[S_4 - (S_1 \cup S_2 \cup S_3)] \cup \cdots,$$

故应用定理 3、5、6 即得.

由定理 3、4、5、6 及推论 1、2、3 便知, L 可测集对于作可数和及作交, 作差的运算是封闭的. 满足这一性质的集类通常称为 σ 集合环, 定理 6 的公式 (1) 更告诉我们 L 测度是具有可数可加性的测度。

定理 7 **设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ 也是可测集合.**

证明 因有 $C\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(CS_i)$, 应用定理 2 与推论 3 即得。

定理 8 **设 $\{S_i\}$ 是一列递增的可测集合:**

$$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots.$$

令 $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, 则

$$mS = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

证明 因有

$$S = S_1 \cup (S_2 - S_1) \cup (S_3 - S_2) \cup \cdots \cup (S_n - S_{n-1}) \cup \cdots,$$

其中各被加项都可测且互不相交, 故应用定理 6 公式(1), 即得(令 $S_0 = \varnothing$)

$$m(S) = \sum_{i=1}^{\infty} m(S_i - S_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(S_i - S_{i-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} m\left[\bigcup_{i=1}^{n} (S_i - S_{i-1})\right] = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

定理 9 设$\{S_i\}$是一列递降的可测集合:

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots.$$

令 $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{n\to\infty} S_n$, 则当 $mS_1 < \infty$ 时

$$mS = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

证明 由于 S_n 可测, 由定理 7 知 S 可测. 又因 S_n 递降, 从而 $\{C_{S_1}S_n\}$递升, 故由定理 8 有

$$\lim_{n\to\infty} m[C_{S_1}S_n] = m[\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{S_1}S_n] = mC_{S_1}S.$$

因 $mS_1 < \infty$, 有

$$m(S_1 - S) = \lim_{n\to\infty} m(S_1 - S_n).$$

因
$$(S_1 - S_n) \cup S_n = S_1,$$
$$m(S_1 - S_n) + mS_n = mS_1,$$

有
$$m(S_1 - S) = \lim_{n\to\infty} m(S_1 - S_n) = mS_1 - \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

由于
$$m(S_1 - S) = mS_1 - mS,$$

故
$$mS = \lim_{n\to\infty} mS_n.$$

注意, 定理 9 中 $mS_1 < \infty$ 的条件是重要的, 下面是一反例.

设 $S_n = (n, +\infty)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 显然$S_1 \supset S_2 \supset \cdots$, $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} (n, \infty) = \varnothing$, 所以 $mS = 0$.

而
$$mS_n = m(n, +\infty) = \infty$$

故
$$\lim_{n\to\infty} mS_n = \infty \neq 0 = mS.$$

§4. 可 测 集 (续)

在前一节中, 我们定义了什么叫可测集合, 并且讨论了可测集

合的一些性质，但是在一般常见的集合中有哪些是可测的呢？我们现在来回答这个问题.

定理 1 (1) **凡外测度为零之集皆可测，称为零测度集.**

(2) **零测度集之任何子集仍为零测度集.**

(3) **有限个或可数个零测度集之和集仍为零测度集.**

证明留给读者.

定理 2 **区间** I(不论开、闭或半开半闭区间)**都是可测集合，且** $mI=|I|$.

证明 设 I_0 为异于区间 I 的任一开区间，易知

$$|I_0|=m^*(I_0\cap I)+m^*(I_0\cap CI).$$

事实上，在 R^1 中显然，在 R^2 中由于 $I_0\cap I$ 为区间，故 $I_0\cap CI$ 可以分解成至多四个互不相交的区间 I_i, $i=1, 2, 3, 4$, 从而可证 $m^*(I_0\cap CI)\leqslant\sum_{i=1}^{4}|I_i|$，因此

$$m^*(I_0\cap I)+m^*(I_0\cap CI)\leqslant|I_0|,$$

另一方面，反向不等式总成立，于是

$$m^*(I_0\cap I)+m^*(I_0\cap CI)=|I_0|,$$

R^n 情形仿此.

今设 T 为任意集合，则对于任何 $\varepsilon>0$，有一列开区间$\{I_i\}$，使 $T\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\leqslant m^*T+\varepsilon$，但由于

$$T\cap I\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i\cap I),\ T\cap CI\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i\cap CI),$$

故 $m^*(T\cap I)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap I)$, $m^*(T\cap CI)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap CI)$.

从而

$$m^*(T\cap I)+m^*(T\cap CI)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap I)+\sum_{i=1}^{\infty}m^*(I_i\cap CI)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}[m^*(I_i\cap I)+m^*(I_i\cap CI)]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\leqslant m^*T+\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，即得

$$m^*(T\cap I)+m^*(T\cap CI)\leqslant m^*T.$$

另一方面，显然有

$$m^*(T\cap I)+m^*(T\cap CI)\geqslant m^*T,$$

故

$$m^*(T\cap I)+m^*(T\cap CI)=m^*T.$$

这说明 I 满足定义 3 的卡氏条件，从而 I 可测。

至于

$$mI=|I|$$

是因为 §2 之例 2 $\quad m^*I=|I|$。

定理 3　凡开集、闭集皆可测．

证明　这是因为任何非空开集可表示为可数多个互不相交的左开右闭区间之并(在 R^1 则可表示为有限个或可数多个开区间之并，其中可包含无界的区间)，而区间是可测的．开集既可测，则闭集作为开集之余集自然也可测(§3 定理 2)．

定理 4　凡 J 可测集皆 L 可测，且两种测度之值相同．

证明　设 E 为 J 可测，由 J 外测度与 L 外测度的定义(后者采用了更多的覆盖)显然有

$$m^*E\leqslant(m^*E)_J.$$

另一方面，由于

$$\varphi_E(P)=1-\varphi_{I-E}(P),\quad \underline{\iint_I}\varphi_E(P)dV=|I|-\overline{\iint_I}\varphi_{I-E}(P)dV,$$

故知

$$(m_*E)_J = |I| - (m^*(I-E))_J,$$

再由可测集的定义 1 可知

$$m_*E = |I| - m^*(I-E).$$

故又有 $$(m_*E)_J \leqslant m_*E,$$

即我们有关系:

$$(m_*E)_J \leqslant m_*E \leqslant m^*E \leqslant (m^*E)_J.$$

所以当 E 为 J 可测时，它同时也为 L 可测，而且两种测度相等:

$$mE = (mE)_J.$$

这定理告诉我们 L 测度确实是 J 测度的扩充.

定义 1 设集合 G 可表为一列开集 $\{G_i\}$ 之交集:

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

则 G 称为 G_δ 型集.

设集合 F 可表为一列闭集 $\{F_i\}$ 之和集:

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

则 F 称为 F_σ 型集.

定义 2 凡属可以从开集出发，用取余集，取有限个或可数个集合的并集或交集等手续不超过可数多次而得的集合，统称为波雷耳(Borel)集或波雷耳可测集.

显然 G_δ 型集及 F_σ 型集都是波雷耳集.

定理 5 凡波雷耳集都是 L 可测集.

证明 显然.

根据波雷耳集的定义，波雷耳集全体已构成一个 σ 环. 但是可以证明，并非每个 L 可测集都是波雷耳集. 那么 L 可测集合类中除了波雷耳集之外，究竟还包含一些怎样的集合呢?

定理 6 设 E 是任一可测集，则一定存在 G_δ 型集 G，使 $G\supset E$，且 $m(G-E)=0$.

证明 (1) 先证：对于任意 $\varepsilon>0$，存在开集 G，使 $G\supset E$，且 $m(G-E)<\varepsilon$.

为此，先设 $mE<\infty$，则由测度定义，有一列开区间 $\{I_i\}$，$i=1,2,\cdots$，使

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\supset E,\quad 且\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<mE+\varepsilon.$$

令 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$，则 G 为开集，$G\supset E$，且

$$mE\leqslant mG\leqslant\sum_{i=1}^{\infty} mI_i=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<mE+\varepsilon.$$

因此，$mG-mE<\varepsilon$（这里用到 $mE<\infty$），从而 $m(G-E)<\varepsilon$.

其次，设 $mE=\infty$，这时 E 必为无界集，但它总可表示成可数多个互不相交的有界可测集的和：$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ $(mE_n<\infty)$，对每个 E_n 应用上面结果，可找到开集 $G_n\supset E_n$，使 $m(G_n-E_n)<\dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

令 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$，则 G 为开集，$G\supset E$，且

$$G-E=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n-\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n-E_n),$$

$$m(G-E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m(G_n-E_n)<\varepsilon.$$

(2) 依次取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，由证明中的 (1) 存在开集 $G_n\supset E$，使 $m(G_n-E)<\dfrac{1}{n}$.

令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，则 G 为 G_δ 型集，$G\supset E$，且

$$m(G-E)\leqslant m(G_n-E)<\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots$$

故
$$m(G-E)=0.$$

定理 7　设 E 是任一可测集，则一定存在 F_σ 型集 F，使 $F\subset E$，且 $m(E-F)=0$.

证明　因 CE 也可测，由定理 6 存在 G_δ 型集 $G\supset CE$，使 $m(G-CE)=0$.

令 $F=CG$，则 F 为 F_σ 型集，$F\subset E$，且

$$m(E-F)=m(G-CE)=0.$$

上面两个定理告诉我们：只要有了全部 G_δ 型集（或 F_σ 型集）（它们只是波雷耳集合类的一部分）和全部 L 零测度，集那么，一切 L 可测集都可以获得. 它们一律可表示成 $E=G-N$ 或 $E=F\cup N$ 的形式，其中 G 是 G_δ 型集，F 是 F_σ 型集，而 N 是零测度集.

最后，我们提出一个问题：是否每一个集合都是 L 可测呢？不是的！我们在下一节中专门讨论这个问题.

§5*. 不 可 测 集

在本节中我们仅对直线上每个集是否都是 L 可测集作出回答. 下面我们要作一个不是 L 可测的一个集. 注意构造这样的集不是很容易的，因为我们构造集通常都是从区间出发经过一系列并、交、差等运算来获得，而这样的集都是波雷耳集，当然总是 L 可测的. 下面我们先讲勒贝格测度的平移不变性，然后利用这种平移不变性来构造一个 L 不可测集.

对于任何一个实数 α，作 $R^1\to R^1$ 的映照 τ_α：$x\to x+\alpha$. 它是直线上的一个平移. 一个集 $E\subset R^1$，经过平移 α 后所得的集记为 $\tau_\alpha E$

$=\{x+\alpha | x\in E\}$. 现在我们讨论在平移变换下,集的测度有什么变化. 显然当 E 为区间时, $\tau_\alpha E$ 亦为区间,而且 $mE=m(\tau_\alpha E)$.

定理　对任何集 $E\subset R^1$, 具有 $m^*(E)=m^*(\tau_\alpha E)$, 且当 E 为 L 可测时, $\tau_\alpha E$ 也为 L 可测的.

证明　因对任何一列开区间 $\{I_i\}$, $E\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 同时就有 $\tau_\alpha I_i$ 亦为开区间, 以及 $\tau_\alpha E\subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_\alpha I_i)$, 所以

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| \,\Big|\, E\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}\geqslant m^*(\tau_\alpha E).$$

但 $\tau_\alpha E$ 再平移 $\tau_{-\alpha}$ 后就是 E, 所以 $m^*(\tau_\alpha E)\geqslant m^*E$. 这样就得到 $m^*E=m^*(\tau_\alpha E)$.

如果 E 为 L 可测, 那末对于任何 $T\subset R^1$ 成立

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE).$$

由于 $\tau_\alpha(T\cap E)=\tau_\alpha T\cap \tau_\alpha E$, $\tau_\alpha(T\cap CE)=\tau_\alpha T\cap \tau_\alpha CE$, 因此从上式得到

$$m^*(\tau_\alpha T)=m^*(\tau_\alpha T\cap \tau_\alpha E)+m^*(\tau_\alpha T\cap \tau_\alpha CE),$$

而上式中 $\tau_\alpha T$ 是任意集, 因此 $\tau_\alpha E$ 为 L 可测.

定理说明, 集 $E\subset R^1$ 经过平移后, 它的外测度不变, 而 L 可测集经过平移后仍为 L 可测集(当然它的测度也不变). 这个性质称为勒贝格测度的平移不变性.

用类似的方法还可以证明勒贝格测度的反射不变性, 就是说, 如果记 τ 是 $R^1\to R^1$ 的如下映照

$$\tau: x\to -x,\ \tau E=\{-x | x\in E\},$$

那末对任何 $E\subset R^1$, $mE=m(\tau E)$。我们不再详述。

下面我们利用测度的平移不变性作一个不可测集.

我们的想法是这样的: 在直线上造一个集 Z, 要求对于 Z, 可

取这样的一列数 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$, 使得 Z 经平移 τ_{r_n} 后得到的集 $Z_n=\tau_{r_n}Z$ 有下面的性质:

1° $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ 包含一个区间(例如 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \supset [0, 1]$);

2° $\{Z_n\}$是一列互不相交的集, 而且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ 是有界集(例如 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subset [-1, 2]$).

如果 Z 具有这样两条性质, 那末 Z 就一定不是 L 可测集. 因为如果 Z 是可测的, 那么 Z_n 也是可测的, 而且 $mZ_n=mZ$. 由于 Z_n 是两两不相交的, 所以

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} mZ_n=\sum_{n=1}^{\infty} mZ \tag{1}$$

又因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ 是有界集, 并且它包含一个长度不为零的区间, 因此由测度的单调性可知

$$0<\alpha \leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) \leqslant \beta<+\infty,$$

从这个式子及(1)式, 就发现 mZ 必须等于零又必须大于零. 这个矛盾说明 Z 是不可测集.

现在我们具体地构造这样的集 Z.

将$[0, 1]$中的所有数依下法分类: 两数 ξ, η 当且仅当 $\xi-\eta$ 是有理数时, 称 ξ 与 η 属于同一类. 设 $\xi \in [0, 1]$, 将$[0, 1]$中具有形式 $\xi+r$(r 表示有理数)的点全体归为一类 $E(\xi)$. 这样, 对于一个 ξ 有一类 $E(\xi)$ 与之对应, 且 $\xi \in E(\xi)$. 集 $E(\xi)$ 不同于 $E(\eta)$ 时, 称 $E(\xi)$ 与 $E(\eta)$ 是不同的类, 应当注意的是, 当 $\xi \neq \eta$ 时可能 $E(\xi)=E(\eta)$. 可以证明不同的两类 $E(\xi)$ 和 $E(\eta)$ 是不相交的: 因为如果

$E(\xi)\cap E(\eta)\neq\varnothing$，则必有 $\zeta\in E(\xi)\cap E(\eta)$，因而 $\zeta=\xi+r_\xi$，$\zeta=\eta-r_\eta$，其中 r_ξ、r_η 都是有理数．故得 $\eta=\xi+r_\xi-r_\eta$．现在假定 $t\in E(\eta)$，则由 $t=\eta+r=\xi+(r_\xi-r_\eta+r)$，得 $t\in E(\xi)$．从而 $E(\eta)\subset E(\xi)$．同理可得 $E(\xi)\subset E(\eta)$，因此 $E(\xi)=E(\eta)$．此与 $E(\xi)$ 与 $E(\eta)$ 是不同的两类之假设矛盾．

这样一来，就把[0, 1]区间分解成一族两两不交的集的并集．我们在每类（集）中取一个代表数组成一个集 Z（当 $E(\xi)=E(\eta)$ 时，尽管 ξ 可以不等于 η，但这是同一类，我们只取这类中的一个代表数）．换句话说，对任何 $\xi\in[0, 1]$，$E(\xi)\cap Z$ 是一个单元素集．

接着我们把[－1, 1]中的全体有理数排成一列 r_1，r_2，r_3，…，并记 $Z_n=\tau_{r_n}Z$．我们证明这样作出的 Z_n 确实具有前面说的性质1°和2°．

1°　对于任何 $\xi\in[0, 1]$，$E(\xi)\cap Z$ 是单元素集，设为 $\{\eta\}$，$\eta\in Z$．因此 $\xi-\eta$ 是有理数，由于 ξ,η 都在[0, 1]中，所以 $\xi-\eta\in[-1, 1]$，因此 $\xi-\eta$ 是 $r_1, r_2, r_3,\cdots$ 中的某一个，设 $\xi-\eta=r_{k'}$，可见 $\xi\in\tau_{r_{k'}}Z=Z_{k'}$．这样我们就证明了任何 $\xi\in[0, 1]$ 必在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$ 中，即 $[0, 1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n$．

2°　Z_n 这一列集是两两不相交的，因为如果存在两个不同的自然数 l 及 n，使 $\xi\in Z_l\cap Z_n$，那末 $\xi-r_l$，$\xi-r_n$ 都属于 Z．但这两个数属于同一类，且因 $l\neq n$，必定 $r_l\neq r_n$．所以 $\xi-r_l$ 与 $\xi-r_n$ 是不同的数，但由 Z 的作法它与每个类的交集只有一个元，这就产生了矛盾．这样证明了 $\{Z_n\}$ 这一列集是互不相交的．另外由 $Z\subset[0, 1]$，$r_n\in[-1, 1]$，即知 $Z_n\subset[-1, 2]$，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n\subset[-1, 2]$．

由性质 1°、2° 可知，Z 确是不可测集.

注意，如果我们不是从闭区间[0, 1]出发，而是从任何一个具有正测度的集 E 出发，施行同样的手续，那末就知道 E 中存在不可测的子集 Z. 因此，凡具有正测度的集含有不可测的子集.

至此，读者可能会问，既然在直线上还存在勒贝格不可测集，我们能否给出另一种测度，使得对于 R^1 中的任何子集都有测度可言，即任何子集都可测？答案是否定的. 现已证明，在 R^1 上不可能存在满足以下条件的测度

1° 任何子集都可测；

2° [0, 1]的测度是 1，即测度具有正则性；

3° 具有可数可加性；

4° 测度对运动不变，即 A 和 B 全等，则 A 和 B 有相同的测度.

在 $R^n(n>1)$ 上也不存在这样的测度.

因此，要找一个任何子集都可测的可数可加测度是办不到的. 然而如果退一步，只要有限可加，那么在 R^1 和 R^2 存在着巴拿赫(Banach)测度，使得任何子集都可测. 这就是 1923 年 Banach 证明的定理：

在 R^1 和 R^2 上，存在着正则的、有限可加的、对运动不变的测度，使得任何子集均可测.

附录 可测集两个定义等价性的证明

设 E 依定义 3 可测，则当 E 为有界集时，只须取 T 为包含 E 的开区间，当 E 为无界集时，只须取 T 为任一开区间，即知 E 依定义 2 可测.

设 E 依定义 2 可测.

1) 我们先证明这时对任何开区间 I_0，有

$$|I_0| = m^*(I_0 \cap E) + m^*(I_0 \cap CE).$$

为此，又只须处理 E 为有界的情况(因为若 E 无界，可以化为可数

个有界集 E_k 之并，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$）. 设 $m_*E=m^*E$，即存在区间 $I\supset E$，使

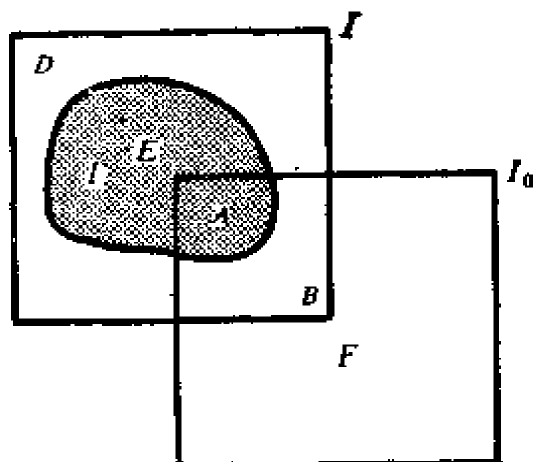


图 3.1

$$m^*E+m^*(I-E)=|I|. \quad (1)$$

我们的任务是在图 3.1 的标记下来证明下面等式：

$$|I_0|=m^*A+m^*(B\cup F).$$

$(A=I_0\cap E, B\cup F=I_0\cap CE)$.

由于 I_0 依定义 3 可测（§ 4定理 2），对 $T_1=E$，有

$$m^*A+m^*\Gamma=m^*(A\cup\Gamma) \quad (2)$$

（其中 $A=I_0\cap T_1$，$\Gamma=CI_0\cap T_1$，且 $A\cup\Gamma=T_1=E$）.

同理，对 $T_2=I-E$，有

$$m^*B+m^*D=m^*(B\cup D) \quad (3)$$

（其中 $B=I_0\cap T_2$，$D=CI_0\cap T_2$，且 $B\cup D=T_2=I-E$）. (2)，(3)两式相加得：

$$\begin{aligned}m^*A+m^*B+m^*\Gamma+m^*D&=m^*(A\cup\Gamma)+m^*(B\cup D)\\&=m^*E+m^*(I-E).\end{aligned}$$

故由式(1)有

$$m^*A+m^*B+m^*\Gamma+m^*D=|I|. \quad (4)$$

另一方面，显然有

$$m^*(A\cup B)+m^*(\Gamma\cup D)=|I|, \quad (5)$$

由式(4)与式(5)得：

$$\begin{aligned}m^*A+m^*B&=m^*(A\cup B)+m^*(\Gamma\cup D)-[m^*\Gamma+m^*D]\\&\leqslant m^*(A\cup B).\end{aligned}$$

由于 $m^*A+m^*B\geqslant m^*(A\cup B)$ 总是成立，故得

$$m^*A+m^*B=m^*(A\cup B).$$

两边相加 m^*F $(F=I_0-(A\cup B)=I_0-(I\cap I_0)=I_0\cap CI)$，得

$$m^*A+m^*B+m^*F=m^*(A\cup B)+m^*F, \tag{6}$$

而 $m^*(A\cup B)+m^*F=m^*(I_0\cap I)+m^*(I_0\cap CI)=m^*I_0=|I_0|$
(因为 I 依定义 3 可测).

又 $m^*B+m^*F=m^*(B\cup F)$(因 I 依定义 3 可测，令 $T=B\cup F$，则得此式).

从而(6)式左端 $=m^*A+m^*(B\cup F)$. 故所要证的等式:

$$|I_0|=m^*(I_0\cap E)+m^*(I_0\cap CE)$$

成立.

2) 至此可以完全搬用 §4 定理 2 的证法(只须以 E 代替那里的 I)来证明: 对任意 T 有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE).$$ 证毕.

第三章 习 题

1. 证明若 E 有界，则 $m^*E<+\infty$.

2. 证明可数点集的外测度为零.

3. 设 E 是直线上一有界集合，$m^*E>0$，则对任意小于 m^*E 的正数 c，恒有 E 的子集 E_1，使 $m^*E_1=c$.

4. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是一些互不相交的可测集合，$E_i\subset S_i$ $i=1,2,\cdots,n$ 求证

$$m^*(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=m^*E_1+m^*E_2+\cdots+m^*E_n.$$

5. 若 $m^*E=0$，则 E 可测.

6. 证明康托尔(Cantor)集合的测度为零.

7. 证明若 E 可测，则对于任意 $\varepsilon>0$，恒有开集 G 及闭集 F，使 $F\subset E\subset G$，而 $m(G-E)<\varepsilon$，$m(E-F)<\varepsilon$.

8. 设 $E\subset R^q$，存在两列可测集 $\{A_n\}$，$\{B_n\}$，使得 $A_n\subset E\subset B_n$，且 $m(B_n-A_n)\to 0$ $(n\to\infty)$，则 E 可测.

9. 证明直线上所有可测集合作成的类 $\mathfrak{M}$ 的基数等于直线上的所有集合类的基数.

第四章　可测函数

§1. 可测函数及其性质

由于建立积分的需要，我们在本章中专门讨论一类重要的函数——可测函数．它也是从测度观点来研究函数时所必然要考虑的一类函数．它一方面和大家熟悉的连续函数有密切的联系，另一方面又在应用上和理论上成为足够广泛的一个函数类．

这里特别声明一下，今后凡提到函数都是指定义在 R^n 中某点集上的实函数，并且允许它以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为函数值．$\pm\infty$ 也称为非真正的实数，通常的实数则称为有限实数．函数值都是有限实数的函数称为有限函数．有界函数仍在通常意义下来理解．因此有界函数必是有限函数，但反之不真．

关于包含 $\pm\infty$ 在内的实数运算作如下规定：

$+\infty$ 是全体有限实数的上确界，$-\infty$ 是全体有限实数的下确界：$-\infty<a<+\infty$（a 为任何有限实数）．从而对于上（下）方无界的递增（减）数列 $\{a_n\}$ 总有 $\lim a_n=+\infty\quad(-\infty)$．

对于任何有限实数 a，

$$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=(\pm\infty)-a=a-(\mp\infty)=\pm\infty,$$

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,\quad \frac{a}{\pm\infty}=0,$$

对任何有限实数 $a>0\quad(<0)$，

$$a(\pm\infty)=(\pm\infty)a=\frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty\quad(\mp\infty),$$

$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty)=-\infty,$$
$$0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0.$$

反之，$(\pm\infty)-(\pm\infty)$，$(\pm\infty)+(\mp\infty)$，$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$，$\frac{\mp\infty}{\pm\infty}$，$\frac{a}{0}$，$\frac{\pm\infty}{0}$，都认为是无意义的.

一个定义在 $E\subset R^n$ 上的实函数 $f(x)$ 确定了 E 的一组子集
$$\{x\,|\,x\in E,\,f(x)>a\}\quad(\text{简记作 } E[f>a]),$$
这里 a 取遍一切有限实数. 反之，易知 $f(x)$ 本身也由 E 的这组子集而完全确定. 因此从这组子集的性质，可以反映出 $f(x)$ 的性质.

定义 1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E\subset R^n$ 的实函数. 如果对于任何有限实数 a，$E[f>a]$ 都是可测集，则称 $f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数①.

定理 1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数，下列任一条件都是 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件:

(1) 对任何有限实数 a，$E[f\geqslant a]$ 都可测;

(2) 对任何有限实数 a，$E[f<a]$ 都可测;

(3) 对任何有限实数 a，$E[f\leqslant a]$ 都可测;

(4) 对任何有限实数 $a,b\quad(a<b)$，$E[a\leqslant f<b]$ 都可测(但充分性要假定 $|f(x)|<\infty$).

证 $E[f\geqslant a]$ 与 $E[f<a]$ 对于 E 是互余的，同样 $E[f\leqslant a]$ 与 $E[f>a]$ 也是对于 E 是互余的，故在前三个条件中，只须证明(1)的充要性.

事实上，易知
$$E[f\geqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left[f>a-\frac{1}{n}\right],$$

① 如 $mE=1$，则 E 的可测子集全体 B 成为一个 Borel 体，而在 E 上的可测函数 $f(x)$，便相当于概率论中的随机变量，即 $((E,B)\longrightarrow R^1)$.

$$E[f>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f\geqslant a+\frac{1}{n}\right].$$

由第一式便知 $f(x)$ 可测时条件(1) 成立（一列可测集的交仍为可测集）．由第二式便知条件(1)成立时 $f(x)$ 可测（一列可测集之并仍为可测集）．

仿此关于(4)的充要性，只须注意表示式：

$$E[a\leqslant f<b]=E[f\geqslant a]-E[f\geqslant b],$$

$$E[f\geqslant a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[a\leqslant f<a+n].$$

证毕．

推论 设 $f(x)$ 在 E 上可测，则 $E[f=a]$ 总可测，不论 a 是有限实数或 $\pm\infty$．

证 只须注意

$$E[f=a]=E[f\geqslant a]-E[f>a]$$

和

$$E[f=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f>n],$$

$$E[f=-\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f<-n].$$

根据定理 1，当 $f(x)$ 可测时，出现在三个式子右边的各集都是可测集，因此它们的差或交仍为可测集．证毕．

例 区间 $[a,b]$ 上的连续函数及单调函数都是可测函数．

我们还可以看到定义在可测集 $E\subset R^n$ 的任何连续函数都是可测函数．不过须先明确在一般点集（不限于区间或域）上的连续函数是怎样定义的．

定义 2 定义在 $E\subset R^n$ 上的实函数 $f(x)$ 称为在 $x_0\in E$ 连续，如果 $y_0=f(x_0)$ 有限，而且对于 y_0 的任一邻域 $V(y_0)$，存在 x_0 的某

邻域 $U(x_0)$，使得 $f(U\cap E)\subset V$，即只要 $x\in E$ 且 $x\in U(x_0)$时，便有 $f(x)\in V(y_0)$。如果 $f(x)$在 E 中每一点都连续，则称 $f(x)$在 E 上连续.

显然，一个函数在其定义域中的每一个孤立点都是连续的.

定理 2　可测集 $E\subset R^n$ 上的连续函数是可测函数.

证　设 $x\in E[f>a]$，则由连续性假设，存在 x 的某邻域$U(x)$，使

$$U(x)\cap E\subset E[f>a].$$

因此，令 $G=\bigcup\limits_{x\in E[f>a]}U(x)$，则

$$E[f>a]\subset G\cap E[f>a],$$

从而 $E[f>a]=G\cap E$. 但 G 是开集(因为它是一族开集之并)，而 E 为可测集，故其交 $G\cap E$ 仍为可测集. 证毕.

为了介绍另一类重要的可测函数，我们先引入

定理 3　(1) 设 $f(x)$是可测集 E 上的可测函数，而$E_1\subset E$为 E 的可测子集，则 $f(x)$看作定义在 E_1 上的函数时，它是 E_1 上的可测函数；

(2) 设 $f(x)$定义在有限可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,s)$的并集 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{s}E_i$上，且 $f(x)$在每个 E_i 上都可测，则 $f(x)$在 E 上也可测.

证　(1) 对于任何有限数 a，$E_1[f>a]=E_1\cap E[f>a]$. 由假设等式右边是可测集.

(2) E 是可测集而且对于任何有限数 a，有

$$E[f>a]=\bigcup_{i=1}^{s}E_i[f>a]$$

由假设等式右边也是可测集. 证毕.

定义 3 设 $f(x)$ 的定义域 E 可分为有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_s$, $E=\bigcup_{i=1}^{s} E_i$, 使 $f(x)$ 在每个 E_i 上都等于某常数 c_i, 则称 $f(x)$ 为简单函数.

例如, 在区间[0, 1]上的狄里克雷函数便是一简单函数.

定义在可测集上的常值函数显然是可测的, 由定理 3 便知任何简单函数都是可测的. 因此狄里克雷函数是可测的非连续函数.

下面我们要讨论可测函数的四则运算, 先介绍

引理 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 E 上的可测函数, 则 $E[f>g]$ 与 $E[f\geqslant g]$ 都是可测集.

证 因 $E[f\geqslant g]=E-E[f<g]$, 故只须证明 $E[f>g]$ 可测. 设 $x_0\in E[f>g]$, 亦即 $f(x_0)>g(x_0)$, 则必存在有理数 r, 使 $f(x_0)>r>g(x_0)$, 亦即

$$x_0\in E[f>r]\cap E[g<r],$$

反之亦然.

因此, 设有理数全体为 $r_1, r_2, \cdots$, 则

$$E[f>g]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E[f>r_n]\cap E[g<r_n]),$$

但由定理 1, 等式右边显然是可测集. 证毕.

定理 4 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可测, 则下列函数(假定它们在 E 上有意义)皆在 E 上可测:

(1) $f(x)+g(x)$; (2) $|f(x)|$; (3) $1/f(x)$; (4) $f(x)\cdot g(x)$.

证 我们先对(1)和(4)中当 $g(x)=c$ (有限常数)时的特殊情形进行证明.

关于 $f(x)+c$ 只须注意 $E[f+c>a]=E[f>a-c]$.

关于 $cf(x)$, 则当 $c=0$ 时，显然是可测的；当 $c\neq0$ 时只须注意

$$E[cf>a]=\begin{cases}E\left[f>\dfrac{a}{c}\right], 当c>0,\\ E\left[f<\dfrac{a}{c}\right], 当c<0.\end{cases}$$

现在分别对一般情形进行证明.

(1) $E[f+g>a]=E[f>-g+a]$, 右边括弧中的 $-g+a$ 是可测函数(它是上述(1), (4)特殊情形的结合), 故由引理知右边是可测集.

$$(2)\quad E[|f|>a]=\begin{cases}E[f>a]\cup E[f<-a], & 当\ a\geqslant0,\\ E, & 当\ a<0.\end{cases}$$

$$(3)\quad E\left[\frac{1}{f}>a\right]=\begin{cases}E[f>0]\cap E\left[f<\dfrac{1}{a}\right], 当\ a>0,\\ E[f>0]\setminus E[f=+\infty], 当\ a=0,\\ E[f>0]\cup E\left[f<\dfrac{1}{a}\right], 当\ a<0.\end{cases}$$

$$(4)\quad E[f\cdot g>a]=\begin{cases}\{(E[f>0]\cap E[g>0])\cup(E[f<0]\\ \cap E[g<0])\}\cap E\left[|f|>\dfrac{a}{|g|}\right], \quad 当\ a\geqslant0;\\ E\setminus E[f\cdot g\leqslant a]=E\setminus\{(E[f>0]\cap E[g<0])\\ \cup(E[f<0]\cap E[g>0])\cap\\ \cap E[|f|\geqslant\dfrac{-a}{|g|}]\}, \quad 当\ a<0.\end{cases}$$

定理 5 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列(或有限个)可测函数, 则 $\mu(x)=\inf\limits_n f_n(x)$ 与 $\lambda(x)=\sup\limits_n f_n(x)$ 都在 E 上可测.

证 由于 $E[\mu\geqslant a]=\bigcap\limits_n E[f_n\geqslant a]$,

$$E[\lambda \leqslant a]=\bigcap_{n} E[f_n \leqslant a]$$而得证.

定理 6 设$\{f_n(x)\}$是E上一列可测函数,则$F(x)=\underline{\lim}_{n} f_n(x)$, $G(x)=\overline{\lim}_{n} f_n(x)$也在$E$上可测,特别当$F(x)=\lim_{n} f_n(x)$存在时,它也在$E$上可测.

证 由于$\underline{\lim}_{n} f_n(x)=\sup_{n}(\inf_{m\geq n} f_m(x))$,

$\overline{\lim}_{n} f_n(x)=\inf_{n}(\sup_{m\geq n} f_m(x))$重复应用定理 5 即得证.

证毕.

上面我们知道简单函数都是可测函数, 因此由定理 6 更知一列简单函数$\varphi_n(x)$的极限函数$f(x)=\lim_{n}\varphi_n(x)$也是$E$上的可测函数. 反之有

定理 7 (可测函数与简单函数的关系) 设$f(x)$在E上可测,则$f(x)$总可以表示成一列简单函数$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数 $f(x)=\lim_{n}\varphi_n(x)$,而且还可办到$|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|\leqslant\cdots$.

证 (1) $f(x)\geqslant 0$ 情形.

任取自然数n,将$[0,n]$分成$n\cdot 2^n$等份,每段长为$\frac{1}{2^n}$.

令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{2^n}, & 当\ x\in E\left[\dfrac{k}{2^n}\leqslant f<\dfrac{k+1}{2^n}\right],\\ & \qquad k=0,1,\cdots,n\cdot 2^n-1.\\ n, & 当\ x\in E[f\geqslant n].\end{cases}$$

则$\varphi_n(x)$为E上的简单函数,且不难证明$\varphi_{n-1}(x)\leqslant\varphi_n(x)$, $n=1,2,3,\cdots$.

我们证明$\lim_{n}\varphi_n(x)=f(x)$.

如果$f(x_0)=+\infty$,则$\varphi_n(x_0)=n\to+\infty \quad (n\to\infty)$.

如果 $f(x_0)<+\infty$，则有自然数 N，使 $f(x_0)<N$，从而当 $n\geqslant N$ 时，$|f(x_0)-\varphi_n(x_0)|<\frac{1}{2^n}$. 所以当 $n\to\infty$ 时，$\varphi_n(x_0)\to f(x_0)$.

(2) 一般情形

令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases}f(x), & 当 f(x)\geqslant 0,\\ 0, & 当 f(x)<0.\end{cases}$$

$$f^-(x)=-\min\{f(x),0\}=\begin{cases}-f(x), & 当 f(x)\leqslant 0,\\ 0, & 当 f(x)>0.\end{cases}$$

则由定理 5，$f^+(x)$，$f^-(x)$都是E上非负可测函数，而 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$. 分别对 $f^+(x)$，$f^-(x)$作出相应的简单函数列 $\{\varphi_n^+(x)\}$，$\{\varphi_n^-(x)\}$，则 $\varphi_n(x)=\varphi_n^+(x)-\varphi_n^-(x)$，$n=1,2,\cdots$即为所求. 证毕.

由此得到：函数 $f(x)$在E上可测的充要条件是 $f(x)$总可表示为一列简单函数$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数，其中

$$|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|\leqslant\cdots.$$

注：函数 $f(x)$ 在E上可测，也可定义为它总能表示成一列简单函数$\{\varphi_n(x)\}$的极限函数，其中$|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|\leqslant\cdots$.

定义 4 设Π是一个与集合E的点 x 有关的命题，如果存在E的子集 N，适合 $mN=0$，使得Π在 $E\setminus N$ 上恒成立，也就是说，$E\setminus E[\Pi 成立]$是零测度集，则我们称Π 在E上几乎处处成立，或说Π 于 E a.e. 成立.

例 2 $|\operatorname{tg}(x)|<\infty$ a.e. 于R^1；$[0\ 1]$上的狄里克雷函数$D(x)=0$ a.e.

注意：根据零测度性质，由$\Pi_1(x)$a.e. 于E且$\Pi_2(x)$a.e于E，显然可得"$\Pi_1(x)$且$\Pi_2(x)$"a.e. 于 E，"$\Pi_1(x)$或 $\Pi_2(x)$"a.e. 于 E.

例 3 设 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E，且 $g(x)=h(x)$ a.e. 于 E，则 $f(x)=h(x)$ a.e. 于 E.

§2 叶果洛夫(Егоров)定理

在数学分析中知道一致收敛是函数列很重要的性质，它能保证极限过程和一些运算的可交换性.但一般而论，一个收敛的函数列在其收敛域上是不一定一致收敛的. 例如 $f_n(x)=x^n$ 在$[0,1]$上不一致收敛. 但是只要从$[0\ 1]$ 的右端点去掉任意小的一段成为$[0,1-\delta]$，则 $f_n(x)$在其上就一致收敛了. 其实这一现象在某种意义下是带有普遍意义的. 这就是下面要讲的叶果洛夫定理. 先证明

引理 设 $mE<\infty$, $\{f_n(x)\}$ **是** E **上的一列几乎处处有限的可测函数；** $\lim\limits_n f_n(x)=f(x)$ a.e. **于** E, **且** $|f(x)|<\infty$ a.e. **于** E①, **则对任意** $\varepsilon>0$ **和任意自然数** n, **作** $E[n,\varepsilon]=E[|f_k-f|<\varepsilon, k\geqslant n]$, **我们有**

$$\lim_{n\to\infty} m(E\setminus E[n,\varepsilon])=0.$$

它的几何意义就例子 $f_n(x)=x^n$(图 4.1)来看是清楚的.

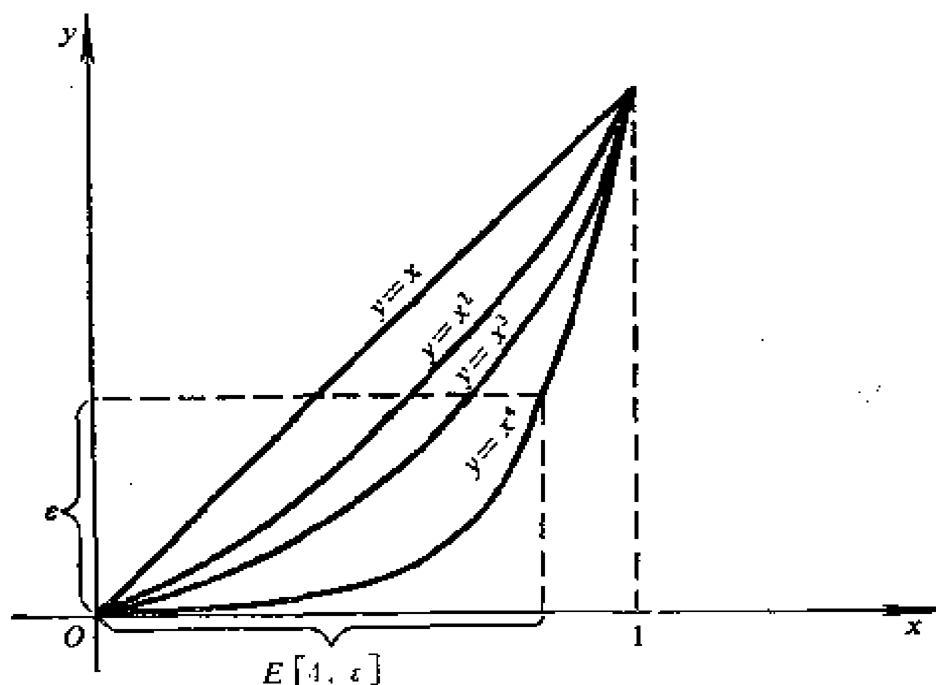


图 4.1

① 我们以后就简称$\{f_n(x)\}$是E上a.e.收敛于一个a.e. 有限的$f(x)$的可测函数列.

证 首先，注意$f(x)$是E上的可测函数（§1定理6），而且由于

$E[n,\varepsilon]=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E[|f_k-f|<\varepsilon]$所以$E[n,\varepsilon]$是可测集.

其次，根据关于$f_n(x)$与$f(x)$之假设，$m(E\setminus E[f_n\to$有限$f])=0$. 但$E[f_n\to$有限$f]\subset E$[除有限个n以外都有$|f_n-f|<\varepsilon$]$=$

$$\underline{\lim_n}E[|f_n-f|<\varepsilon]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E[|f_k-f|<\varepsilon]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[n,\varepsilon]$$

由于$E[n,\varepsilon]$关于n的单调性，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E[n,\varepsilon]=\lim\limits_n E[n,\varepsilon]$且$m(\lim E[n,\varepsilon])=\lim mE[n,\varepsilon]$. 又因$mE<\infty$，依第三章§3定理9，得$\lim m(E\setminus E[n,\varepsilon])=mE-\lim mE[n,\varepsilon]=mE-m(\lim\limits_n E[n,\varepsilon])$ $=m(E\setminus\lim E[n,\varepsilon])\leqslant m(E\setminus E[f_n\to$有限$f])=0$. 证毕.

推论 **设**$mE<\infty$，$\{f_n(x)\}$**是**E**上一列a.e.收敛于一个a.e.有限的函数**$f(x)$**的可测函数列，则对任意**$\varepsilon>0$**有**

$$\lim_n m(E\setminus E[|f_n-f|<\varepsilon])=0.$$

证 由于$E[|f_n-f|<\varepsilon]\supset E[n,\varepsilon]$，所以

$E\setminus E[|f_n-f|<\varepsilon]\subset E\setminus E[n,\varepsilon]$. 再由引理即得证.

定理(Егоров) **设**$m(E)<\infty$，$\{f_n(x)\}$**是**E**上一列a.e.收敛于一个a.e.有限的函数**$f(x)$**的可测函数，则对任意**$\delta>0$，**存在子集**$E_\delta\subset E$，**使**$\{f_n(x)\}$**在**E_δ**上一致收敛，且**$m(E\setminus E_\delta)<\delta$.

证 任选一列自然数$\{n_i\}$，与此相应作E的子集

$$E[\{n_i\}]=\bigcap_{i=1}^{\infty}E\left[n_i,\frac{1}{i}\right]$$

（它由$\{n_i\}$而完全确定）. 则$f_n(x)$必在$E[\{n_i\}]$上一致收敛于$f(x)$.

事实上，任给$\varepsilon>0$，选i_0使$\frac{1}{i_0}<\varepsilon$，则当$n>n_{i_0}$时，对一切

$x\in E[\{n_i\}]\subset E\left[n_{i_0}, \frac{1}{i_0}\right]$, 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{i_0}<\varepsilon$.

所以当给定了任一个 $\delta>0$ 之后，如果能适当的选取$\{n_i\}$，使 $m(E\setminus E[\{n_i\}])<\delta$，则令 $E_\delta=E[\{n_i\}]$，它就满足定理的要求.

但由引理，对于$\varepsilon=\frac{1}{i}$，$i=1, 2, 3, \cdots$ 分别存在充分大的 n_i，使 $m\left(E\setminus E\left[n_i, \frac{1}{i}\right]\right)<\frac{\delta}{2^i}$. 故只要选取满足这条件的$\{n_i\}$，就有

$$m(E\setminus E[\{n_i\}])=m\left(E\setminus\bigcap_{i=1}^{\infty}E\left[n_i, \frac{1}{i}\right]\right)=m\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(E\setminus E\left[n_i, \frac{1}{i}\right]\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m\left(E\setminus E\left[n_i, \frac{1}{i}\right]\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}=\delta.$$ 证毕.

这个定理告诉我们，凡是满足定理假设的 a.e. 收敛的可测函数列，即使不一致收敛，也是“基本上”(指去掉一个测度可任意小的某点集外)一致收敛的. 因此在许多场合它提供了处理极限交换问题的有力工具.

要注意当 $mE=\infty$ 时，定理不成立. 而当 $mE<\infty$ 时逆定理亦成立.

§ 3. 可测函数的构造

在 § 1 我们看到可测集上的连续函数一定是可测函数. 反之，一般的可测函数可以说是“基本上连续”的函数. 这就是下列定理:

定理 1 (鲁津 Лузин) **设 $f(x)$是 E 上 a.e. 有限的可测函数，则对任意 $\delta>0$，存在闭子集 $E_\delta\subset E$，使 $f(x)$在 E_δ 上是连续函数，且 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$.** 简言之在 E 上 a.e. 有限的可测函数是“基本上连续”的函数.

证 我们从特殊到一般分三种情形来讨论。

(1) 简单函数情形。

设 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，各 E_i 可测互不相交，且 $f(x)=c_i$，当 $x\in E_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 对于 $\delta>0$，由于 E_i 是可测集，从而可知存在闭子集 $F_i\subset E_i$，且 $m(E_i\setminus F_i)<\frac{\delta}{n}$. 令 $E_\delta=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$，则 E_δ 为闭集且 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$. 现在证明 $f(x)$在 E_δ 上是连续函数.

事实上，设 $x_0\in E_\delta$，则存在 i_0 使 $x_0\in F_{i_0}$. 由于各 F_i 互不相交，故 $x_0\overline{\in}\bigcup_{i\neq i_0}F_i$，但右边为闭集，$x_0\in C(\bigcup_{i\neq i_0}F_i)$(开集)，故有 x_0 的邻域 $U(x_0)$使 $U(x_0)\cap\bigcup_{i\neq i_0}F_i=\varnothing$，从而

$$U(x_0)\cap E_\delta=U(x_0)\cap\bigcup_{i=1}^{n}F_i=U(x_0)\cap F_{i_0}.$$

所以当 $x\in U(x_0)\cap E_\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|=|c_{i_0}-c_{i_0}|<\varepsilon.$$

(2) $mE<\infty$ 情形.

由§1 定理 7，E上任一可测函数 $f(x)$ 都是E上某一列简单函数$\{\varphi_n(x)\}$的极限.

因为 $mE<\infty$，根据叶果洛夫定理，任取 $\delta>0$，存在可测子集 $E_0^*\subset E$，使 $\varphi_n(x)$在 E_0^* 上一致收敛于 $f(x)$，且 $m(E\setminus E_0^*)<\frac{\delta}{4}$.

又因存在闭集 $E_0\subset E_0^*$使$m(E_0^*\setminus E_0)<\frac{\delta}{4}$，所以 $m(E\setminus E_0)<\frac{\delta}{2}$. 当然 $\varphi_n(x)$在 E_0 上也一致收敛于 $f(x)$.

由(1)知，存在闭集 $E_i\subset E_0$，$i=1,2,\cdots$. 使 $\varphi_i(x)$在 E_i 上是

连续的，且 $m(E_0\setminus E_i)<\frac{\delta}{2^{i+1}}$.

令 $E_\delta=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\subset E_0$，显然 $m(E_0\setminus E_\delta)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{i+1}}=\frac{\delta}{2}$，且 $\varphi_n(x)$ 在闭集 E_δ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的连续函数列，从而 $f(x)$ 是 E_δ 上的连续函数（证明与区间上的相同），且 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$. 实际上

$$m(E\setminus E_\delta)=m[(E\setminus E_0)\cup(E_0\setminus E_\delta)]<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.$$

(3) $mE=\infty$ 情形.

此时 E 是无界集，则它总可表为可数个互不相交的有界可测集的和集 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. 由(2) $f(x)$ 在 E_i 上基本上连续，即存在闭子集 $E_{\delta_i}\subset E_i$，使 $f(x)$ 在 E_{δ_i} 上连续且

$$m(E_i\setminus E_{\delta_i})<\delta_i=\frac{\delta}{2^{i+1}},\ i=1,2,3,\cdots.$$

令 $E_\delta^*=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{\delta_i}$，不难证明：$f(x)$ 在 E_δ^* 上连续且 $m(E\setminus E_\delta^*)<\frac{\delta}{2}$，又因存在闭集 $E_\delta\subset E_\delta^*$，使 $m(E_\delta^*\setminus E_\delta)<\delta/2$，所以 $m(E\setminus E_\delta)<\delta$ 且 $f(x)$ 在 E_δ 上连续. 证毕.

上述证明方法值得注意. 先考虑简单函数，然后再往一般的可测函数过渡，这在许多场合下是行之有效的方法. 另外在证明中，叶果洛夫定理的运用也是很成功的.

鲁津定理使我们对可测函数的结构有了进一步的了解，它揭露了可测函数与连续函数的关系. 在应用上通过它常常可以把有关的可测函数问题归结为连续函数的问题，从而得以简化.

最后提一句，有的著者用鲁津定理所反映的重要性质来定义

可测函数，事实上这两种定义是等价的，因为鲁津定理的逆定理也是成立的.

我们还可以给鲁津定理以另一个形式.

定理2 **设** $f(x)$ **是** E **上a.e.有限的可测函数，则对任意** $\delta>0$，**存在闭集** $F\subset E$ **及整个** R^1 **上的连续函数** $g(x)$（F **及** $g(x)$ **依赖于** δ），**使在** F **上** $g(x)=f(x)$，**且** $m(E\setminus F)<\delta$. **此外还可要求** $\sup\limits_{R^1}g(x)=\sup\limits_{F}f(x)$ **及** $\inf\limits_{R^1}g(x)=\inf\limits_{F}f(x)$.

证 由定理1，存在闭集 $F\subset E$，使 $f(x)$ 在 F 上连续且 $m(E\setminus F)<\delta$.

现在的问题在于将闭集 F 上的连续函数 $f(x)$ 延拓成整个 R^1 上的连续函数. 这是可以办到的.

事实上，由于 F 是闭集，故 $R^1\setminus F$ 是开集，从而是至多可数个互不相交的开区间 (a_i,b_i) 的并集（这些开区间中可能包括一到两个无限长的区间）. 由于各 (a_i,b_i) 的端点属于 F，故总可将 $f(x)$ 按下面这样在各 $[a_i,b_i]$ 中保持线性而且连续地延拓为 $g(x)$：

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in F,\\ f(a_i)+\dfrac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}(x-a_i), & \\ & \text{当 } x\in(a_i,b_i),\ a_i,b_i \text{ 有限}.\\ f(a_i), & \text{当 } x\in(a_i,b_i),\ b_i=+\infty.\\ f(b_i), & \text{当 } x\in(a_i,b_i),\ a_i=-\infty.\end{cases}$$

这个 $g(x)$ 就满足我们的一切要求（细节留给读者去证）.

值得注意的是这个定理也可推广到 n 维空间①.

---

① 参看 L. M. Graves 著 The Theory of Function of Real Variables, 1946, Chicago. 第116—118页.

§ 4. 依测度收敛

现在我们引进一种用测度来描述函数列收敛的概念.

定义 1 设$\{f_n(x)\}$是$E\subset R^q$上的一列 a.e. 有限的可测函数, 若有E上 a.e. 有限的可测函数$f(x)$满足下列关系:

对任意$\sigma>0$有$\lim\limits_{n} mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=0$, 则称函数列$\{f_n(x)\}$依测度收敛于$f(x)$, 或度量收敛于$f(x)$记为: $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$.

改用ε-N说法: 对任意$\varepsilon>0$及$\sigma>0$, 存在正数$N(\varepsilon,\sigma)$, 使$n\geqslant N(\varepsilon,\sigma)$时, $mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]<\varepsilon$.

依测度收敛用文字叙述, 就是说, 如果事先给定一个(误差)$\sigma>0$, 不论这个σ有多么小, 使得$|f_n(x)-f(x)|$大于σ的点x虽然可能很多, 但这些点的全体的测度随着n无限增大而趋向于零.

测度收敛和我们熟知的处处收敛或几乎处处收敛概念是有很大区别的. 我们不妨举例加以说明.

例 1 测度收敛而处处不收敛的函数列.

取$E=(0,1]$, 将E等分, 定义两个函数:

$$f_1^{(1)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right],\\ 0, & x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

$$f_2^{(1)}(x)=\begin{cases}0, & x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right],\\ 1, & x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

然后将$(0,1]$四等分、八等分等等. 一般地, 对每个n, 作2^n个函数:

$$f_j^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\\ 0, & x\overline{\in}\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right].\end{cases}\qquad j=1,2,\cdots,2^n.$$

我们把$\{f_j^{(n)}(x),\ j=1,2,\cdots,2^n\}$先按$n$后按$j$的顺序逐个地排成一列:

$$f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x), \cdots, f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), \cdots, f_{2^n}^{(n)}(x), \cdots \tag{1}$$

$f_j^{(n)}(x)$在这个序列中是第$N=2^n-2+j$个函数. 可以证明这个序列是度量收敛于零的. 这是因为对任何$\sigma>0$,

$E[|f_j^{(n)}-0|\geqslant\sigma]$或是空集 (当$\sigma>1$), 或是$\left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$ (当$0<\sigma\leqslant 1$), 所以

$$m(E[|f_j^{(n)}-0|\geqslant\sigma])\leqslant\frac{1}{2^n} \quad (\text{当 } \sigma>1 \text{ 时, 左端为 } 0).$$

由于当$N=2^n-2+j(j=1,2,\cdots,2^n)$趋于$\infty$时, $n\to\infty$. 由此可见

$$\lim_{N\to\infty} m(E[|f_j^{(n)}-0|\geqslant\sigma])=0, \text{即 } f_j^{(n)}(x)\Longrightarrow 0.$$

但是函数列(1)在$(0,1]$上的任何一点都不收敛。事实上, 对任何点$x_0\in(0,1]$, 无论n多么大, 总存在j, 使$x_0\in\left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$, 因而$f_j^{(n)}(x_0)=1$, 然而$f_{j+1}^{(n)}(x_0)=0$或$f_{j-1}^{(n)}(x_0)=0$, 换言之, 对任何$x_0\in(0,1]$, 在$\{f_j^{(n)}(x_0)\}$中必有两子列, 一个恒为1, 另一个恒为零, 所以序列(1)在$(0,1]$上任何点都是发散的.

反过来, 一个a, e, 收敛的函数列也可以不是依测度收敛的.

例2 取$E=(0,+\infty)$, 作函数列:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n], \\ 0, & x\in(n,+\infty).\end{cases} \quad n=1,2,\cdots$$

显然$f_n(x)\to 1$, 当$x\in E$. 但是当$0<\sigma<1$时,

$E[|f_n-1|\geqslant\sigma]=(n,\infty)$, 且$m(n,+\infty)=\infty$.

这说明$f_n(x)$不测度收敛于1.

尽管两种收敛区别很大, 一种收敛不能包含另一种收敛, 但是下列定理反映出它们还是有密切联系的.

定理1 (黎斯 F. Riesz) **设在E上$f_n(x)$测度收敛于$f(x)$,**

则存在子列 $\{f_{n_i}(x)\}$ 在 E 上 a.e. 收敛于 $f(x)$。

证 对任何自然数 s，取 $\varepsilon=\frac{1}{2^s}$，$\delta=\frac{1}{2^s}$. 由于 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，所以存在自然数 n_s，使

$$mE_s<\frac{1}{2^s},\quad s=1,2,\cdots$$

其中 $E_s=E\left[\,|f_{n_s}-f|\geqslant\frac{1}{2^s}\right]$。不妨设 $n_1<n_2<\cdots$. 取

$$F_k=\bigcap_{s=k}^{\infty}(E\setminus E_s).$$

由于
$$E\setminus E_s=E\left[\,|f_{n_s}-f|<\frac{1}{2^s}\right],$$

所以

$$F_k=E[\,|f_{n_s}-f|<\frac{1}{2^s},\ s=k,\ k+1,\cdots\cdots].$$

显然在 F_k 上，$f_{n_s}(x)\to f(x)$ （其实还是一致收敛的）. 作 $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$，则在 F 上，$f_{n_s}(x)\to f(x)$.

现在只要证明 $m(E\setminus F)=0$ 即可. 由于下列关系

$$E\setminus F=E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}(E\setminus F_k)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{s=k}^{\infty}E_s=\overline{\lim_s}E_s$$

以及

$$\sum_{s=1}^{\infty}mE_s<\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s}=1.$$

再由上限集定义，则对任何自然数 k 有

$$\overline{\lim_s}E_s\subset\bigcup_{s=k}^{\infty}E_s$$

因此

$$m(\overline{\lim_s} E_s) \leqslant m \bigcup_{s=k}^{\infty} E_s \leqslant \sum_{s=k}^{\infty} mE_s \to 0 \quad (k\to\infty).$$

从而得到

$$m(E\setminus F) = m(\overline{\lim_s} E_s) = 0. \qquad \text{证毕.}$$

下面定理说明 a.e. 收敛的函数列在何时成为测度收敛的.

定理 2 (勒贝格 Lebesgue) 设

(1) $mE<\infty$;

(2) $\{f_n(x)\}$**是** E **上 a.e. 有限的可测函数列;**

(3) $\{f_n(x)\}$**在** E **上 a.e. 收敛于 a.e. 有限的函数** $f(x)$, **则**

$$f_n(x)\Rightarrow f(x).$$

证 不妨设$\{f_n(x)\}$与 $f(x)$ 处处有限。对任何 $\varepsilon>0$, 由叶果洛夫定理, 存在可测集 $E_\varepsilon\subset E$, 使 $m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$, 且 $f_n(x)$ 在 E_ε 上一致收敛于 $f(x)$.

对任何 $\sigma>0$, 则存在 $N>0$, 使当 $n\geqslant N$时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\sigma, \text{对任何 } x\in E_\varepsilon.$$

因此当 $n\geqslant N$ 时, $E[|f_n-f|\geqslant\sigma]\subset E\setminus E_\varepsilon$. 故

$$mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]\leqslant m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon,$$

即

$$f_n(x)\Rightarrow f(x). \qquad \text{证毕.}$$

要注意, $mE<\infty$ 这个条件是不能去掉的(见例 2) 再结合例 1, 在 $mE<\infty$ 条件下, 测度收敛弱于 a.e. 收敛.

定理 3 设 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$, $f_n(x)\Rightarrow g(x)$, **则** $f(x)=g(x)$**在** E **上几乎处处成立.**

证 由于

$$|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-g(x)|,$$

故对任何自然数 n,

$$E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\subset E\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\cup E\left[|f_k-g|\geqslant\frac{1}{2n}\right],$$

从而

$$mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\leqslant mE\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]$$
$$+mE\left[|f_k-g|\geqslant\frac{1}{2n}\right].$$

令 $k\to\infty$，即得
$$mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]=0.$$

但是

$$E[f\neq g]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right],$$

故 $mE[f\neq g]=0$，即 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E. 证毕.

第四章 习 题

1. 证明 $f(x)$ 在 E 上为可测函数的充要条件是对任一有理数 r，集 $E[f>r]$ 可测. 如果集 $E[f=r]$ 可测，问 $f(x)$ 是否可测?

2. 设 $f(x)$、$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数，r 为自然数，试证

$$\bigcap_{r=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E\left[|f_n-f|<\frac{1}{r}\right]$$

是 E 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的点集.

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上可测函数列，证明它的收敛点集和发散点集都是可测的.

4. 设 E 是 $[0,1]$ 中的不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in E,\\ -x, & x\notin E.\end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测? $|f(x)|$ 是否可测?

5. 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 E 上 a.e. 有限的可测函数列，而 $f_n(x)$ a.e 收敛于有限函数 $f(x)$，则对任意的 $\varepsilon>0$ 存在常数 c 与可测集 $E_0\subset E$,

$m(E\setminus E_0)<\varepsilon$ 使在 E_0 上，对一切 n 有 $|f_n(x)|\leqslant c$.

6. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可测函数，则 $f(g(x))$ 是可测函数.

7. 设函数列 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在有界集 E 上"基本上"一致收敛于 $f(x)$，证明 $f_n(x)$ a.e. 收敛于 $f(x)$.

8. 试证鲁津定理的逆定理成立.

9. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，且 $f_n(x)\leqslant g(x)$ a.e. 于 E，$n=1,2,\cdots$. 试证 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 E 上几乎处处成立.

10. 设在 E 上 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$，且 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ 几乎处处成立，$n=1,2,\cdots$，则几乎处处有 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

11. 设在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，而 $f_n(x)=g_n(x)$ a.e. 成立，$n=1,2,\cdots$，则有 $g_n(x)\Rightarrow f(x)$.

12. 设 $mE<\infty$，几乎处处有限的可测函数列 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$，$n=1,2,\cdots$，分别依测度收敛于 $f(x)$ 和 $g(x)$，证明

(1) $f_n(x)g_n(x)\Longrightarrow f(x)g(x)$.

(2) $f_n(x)+g_n(x)\Longrightarrow f(x)+g(x)$.

(3) $\min\{f_n(x),g_n(x)\}\Longrightarrow\min\{f(x),g(x)\}$；

$\max\{f_n(x),g_n(x)\}\Longrightarrow\max\{f(x),g(x)\}$.

第五章 积 分 论

§1. 黎曼(Riemann)积分

在介绍勒贝格积分之前，我们先将它的前身——黎曼积分作一回顾，并从测度观点建立一个可积的充要条件.

R积分通常有两种定义. 其一是大家熟知的"极限式"定义(即作为积分和的极限)，另一是"确界式"定义. 在一维情形如下:

定义 1 设 $f(x)$在$[a,b]$有界，T表示$[a,b]$的任一分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

这里 n 为任一自然数，可随T而不同.

设 M_i, m_i 分别表示 $f(x)$ 在$[x_{i-1}, x_i]$上的上、下确界($i=1, 2, \cdots, n$).

$$S(T,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad s(T,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

分别叫做 $f(x)$ 关于分划 T 的大和数与小和数，这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_T S(T,f),\qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_T s(T,f)$$

分别叫做 $f(x)$ 在$[a,b]$上的达布 (*Darboux*) 上积分与下积分，这里上、下确界是对$[a,b]$的一切可能分划T而取的. 如果

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx\quad \left(\text{一般只有}\ \overline{\int_a^b} f(x)dx\geqslant\underline{\int_a^b} f(x)dx\right),$$

则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上R可积并称此共同值为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的积

分，记为$\int_a^b f(x)dx$.

两种定义的等价性建立在下面的定理上.

达布定理 **当分划T的最大区间长$\delta(T)\to 0$时，**

$$S(T,f)\to\overline{\int_a^b} f(x)dx,\quad s(T,f)\to\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

同上面的积分两种定义相应，有界函数$f(x)$黎曼可积的充要条件也有两种(当然它们也是等价的)，那就是：

可积条件1°：当$\delta(T)\to 0$时，

$$S(T,f)-s(T,f)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to 0,$$

这里 $\omega_i=M_i-m_i$

可积条件2°：$\inf\limits_{T}[S(T,f)-s(T,f)]=0$.

这两可积条件的缺点是没有将函数的可积性最后归结到函数的其它内在性质(如连续性等)上面去. 从这一角度去看，下面由勒贝格给出的可积条件就好得多.

可积条件3°: $f(x)$在$[a,b]$上的一切不连续点成一零测度集.

在证明这个条件之前，我们先介绍振幅的概念和一些引理.

在条件1°，2°中出现的$\omega_i=M_i-m_i$，叫做$f(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅. 一般地，如果$f(x)$在点集$A\subset R^n$上有定义且有界，则我们定义$f(x)$在A上的振幅为

$$\omega(A,f)=\sup_{x\in A}f(x)-\inf_{x\in A}f(x).$$

显然，如果$B\subset A$，总有

$$\omega(B,f)\leqslant\omega(A,f)\tag{1}$$

现在考虑定义在$E\subset R^n$上的函数$f(x)$及任一点$x\in E$，我们定义$f(x)$在点x_0的振幅为

$$\omega(x_0)=\lim_{\delta\to 0}\omega(U(x_0,\delta)\cap E,f),$$

这极限由于(1)式的原因一定存在且不小于零.

设 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)\cap E$ 上的上、下确界分别为 $M_\delta(x_0)$ 与 $m_\delta(x_0)$，当 $\delta\to0$ 时，二者的极限分别记为 $M(x_0)$ 与 $m(x_0)$. 显然，

$$m(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant M(x_0),\ 及\ \omega(x_0)=M(x_0)-m(x_0).$$

引理 1 **设 $f(x)$ 定义在 $E\subset R^n$ 上，$x_0\in E$. $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 的振幅为零.**

证 必要性. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当

$$x\in U(x_0,\delta)\cap E,\ 总有\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

从而

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_\delta(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

令 $\delta\to0$，得 $f(x_0)-\varepsilon\leqslant m(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$. 由于 ε 的任意性，所以 $M(x_0)=m(x_0)$.

充分性. 设 $m(x_0)=M(x_0)=f(x_0)$，对任何 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使

$$m(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0),\ M_\delta(x_0)<M(x_0)+\varepsilon.$$

从而得

$$f(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)<f(x_0)+\varepsilon,$$

但当 $x\in U(x_0,\delta)\cap E$，有 $m_\delta(x_0)\leqslant f(x)\leqslant M_\delta(x_0)$，故有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕.

引理 2 **设 $f(x)$ 定义在闭集 $E\subset R^n$ 上，则对任意 $\varepsilon>0$，集**

$$E_\varepsilon=\{x\,|\,\omega(x)\geqslant\varepsilon,\ x\in E\}$$

为闭集. 从而 $f(x)$ 的不连续点构成一 F_σ 型集.

证 设 $x_0\in E_\varepsilon'$，显然 $x_0\in E$，对任何 $\delta>0$，在邻域 $U(x_0,\delta)$ 中含有 E_ε 的无穷多个点 x，而每个 x 满足 $\omega(x)\geqslant\varepsilon$，故

$$\omega(U(x_0,\delta)\cap E,f)\geqslant\varepsilon,$$

令 $\delta\to0$,得 $\omega(x_0)\geqslant\varepsilon$,即 $x_0\in E_\varepsilon$,所以 E_ε 为闭集.

由于 $E[\omega>0]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E\left[\omega\geqslant\dfrac{1}{n}\right]$,所以 $f(x)$ 的不连续点为一 F_σ 型集. 证毕.

证明可积条件 3°. 必要性. 由引理 1,$f(x)$在$[a,b]$ 上不连续点集为 $E[\omega(x,f)>0]$,故只须证明对任何$\delta>0$, $E_\delta\equiv E[\omega(x,f)\geqslant\delta]$是零集即可.

给定$[a,b]$的任一分划

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

根据振幅定义,只要开区间 $I_i=(x_{i-1},\ x_i)$ 内含有 E_δ 的点便有 $\omega_i\equiv\omega(I_i,f)\geqslant\delta$,因此

$$\delta\sum_{I_i\cap E_\delta\neq\phi}|I_i|\leqslant\sum_{I_i\cap E_\delta\neq\phi}\omega_i|I_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\quad(\text{因为 }|I_i|=\Delta x_i),$$

从而

$$\sum_{I_i\cap E_\delta\neq\phi}|I_i|\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这是由于 $f(x)$在$[a,b]$上 R 可积,故由可积条件 2°存在分划 T,使上述不等式中间那一项小于 $\varepsilon/2$.

另一方面,将 T 之$(n+1)$个分点用$(n+1)$个开区间$\{J_i\}$盖住,使之

$$\sum_{i=1}^{n+1}|J_i|<\frac{\varepsilon}{2},$$

故 E_δ 便用有限个开区间盖住,全长小于 ε. 于是 $m^*E_\delta=0$, 所以 $mE_\delta=0$, 从而 $mE[\omega(x,f)>0]=0$.

充分性. 设 $mE[\omega(x,f)>0]=0$, 则对任何 $\delta>0$,有 $mE_\delta=0$,从而有一列开区间$\{K_i\}$将 E_δ 盖住且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|K_i|<\varepsilon$, 由引理 2,

E_δ 为有界闭集，所以由 H-B 定理，从中可选出有限个区间，不妨设 $K_1, K_2, \cdots, K_s$ 将 E_δ 盖住，自然 $\sum_{i=1}^{s}|K_i|<\varepsilon$.

另一方面，因为 $f(x)$ 在 $[a, b]-\bigcup_{i=1}^{s}K_i$ 中每点的振幅均小于 δ，而 $[a, b]-\bigcup_{i=1}^{s}K_i$ 是有界闭集（它是由有限个互不相交的闭区间组成），所以根据振幅及有限覆盖定理，可以将 $[a, b]-\bigcup_{i=1}^{s}K_i$ 进一步划分成小闭区间（有限个），使 $f(x)$ 在这些小闭区间上的振幅都小于 δ，所有这些小闭区间的端点又组成 $[a, b]$ 的一个分划 T，与之相应的和数

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{\omega_i \geq \delta} \omega_i \Delta x_i + \sum_{\omega_i < \delta} \omega_i \Delta x_i < \omega([a, b], f)\varepsilon + \delta(b-a),$$

由于 ε 及 δ 的任意性，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 R 可积.（可积条件 2）. 证毕.

黎曼将柯西（Cauchy）原来只对连续函数定义的积分概念扩张成现在我们所知的 R 积分，从而扩大了积分的应用范围，但是即使在有界函数范围内，R 积分还是存在着很大的缺点，主要表现在以下两个方面:

（1） R 积分与极限可交换的条件太严.

我们知道一列 R 可积函数的极限函数（即使有界）不一定保持 R 可积性. 因此在积分与极限交换问题上，R 积分的局限性就特别突出，大家知道：为了使

$$\int_a^b \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx,$$

对一列收敛的 R 可积函数 $\{f_n(x)\}$ 能成立，当然要求 $\lim\limits_n f_n(x)$ 是 R 可积的. 对 $f_n(x)$ 加上一致收敛的条件可以保证极限函数 R 可积，

同时也保证了上面等式的成立，可是这一充分条件不但非常苛刻而且检验起来也非常不便．由于积分与极限交换问题不能顺利解决，就大大降低了 R 积分的效果．

（2）积分运算不完全是微分运算的逆运算．

我们知道任一 R 可积函数 $f(x)$ 的不定积分（活动上限积分）$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $f(x)$ 的所有连续点都有 $F'(x)=f(x)$，换言之，就是积分后再微分可以还原（$f(x)$的不连续点既成零集，可不计）．

但是另一方面有例子说明，一个可微函数 $F(x)$ 的导函数 $f(x)$ 即使有界也不一定 R 可积（Volterra 的例），因此也就说不上有 N-L．公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt,$$

所以在 R 积分范围内，积分运算只是部分地成为微分运算之逆．

鉴于 R 积分的上述缺陷，人们长期以来就致力于改进的尝试①，直到 1902 年法国数学家 Lebesgue 才成功地引入了一种新积分，后人称之为 Lebesgue 积分，由于它在很大程度上摆脱了上述 R 积分的困境，而且大大地扩充了可积函数的范围，所以今天已成为分析数学中不可缺少的工具．我们在下面主要就是介绍这一积分理论．

§2. 勒贝格积分的定义

L 积分有不止一种的定义方法，为了便于同 R 积分比较，也

---

① 如果在 R 积分定义中将分划 $[a,b]=\bigcup I_i$ 换成分划 $[a,b]=\Sigma\omega_i$，其中 $\{\omega_i\}$ 是有限个互无公共内点的 J 可测集，并相应地将出现在和数中的 $\Delta X_i=|I_i|$ 换成 $(m\omega_i)_J$，这样一来，固然分划及大、小和数是增加了，但是由于 J 可测集可用有限个区间和来逼近，所以结果并不会影响和数的上、下确界，从而也不能由此达到推广积分概念的目的．

为了便于类推到建立在其他(同样具有可数可加性的)测度上的积分起见,我们将采用和R积分确界式定义相当的定义,并为了方便起见而逐步引入.

定义 1 设$E\subset R^q$是一非空可测集,如果$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$,其中各E_i为互不相交的非空可测集,则称有限集合族$D=\{E_i\}$是E的一个可测分划,简称分划.设$D'=\{E'_i\}$是E的另一分划.如果对于任一$E'_j\in D'$,存在$E_i\in D$,使$E'_j\subset E_i$,称D'比D细.

引理 1 **给定E任两个分划D、D',必存在比它们都细的第三个分划**

$$D''=\{E_i\cap E_j \mid E_i\in D, E'_j\in D' \text{ 且 } E_i\cap E'_j\neq\varnothing\}.$$

我们记$D''=DD'$

证 显然.

定义 2 设$f(x)$是定义在R^q中测度有限的集E上的有界函数,对E的任一分划$D=\{E_i\}$,

$$令\quad B_i=\sup_{x\in E_i}f(x),\qquad b_i=\inf_{x\in E_i}f(x),$$

则$\sum\limits_i B_i mE_i$, $\sum\limits_i b_i mE_i$分别称为$f(x)$关于分划D的大和及小和(它们由D完全确定),并分别记为$S(D,f)$及$s(D,f)$.

引理 2 (1) **设**$B=\sup\limits_{x\subset E}f(x)$, $b=\inf\limits_{x\in E}f(x)$, **则**

$$bmE\leqslant s(D,f)\leqslant S(D,f)\leqslant BmE.$$

(2) **设分划**D'**比**D**细,则**$s(D,f)\leqslant s(D',f)$,

$$S(D,f)\geqslant S(D',f).$$

(3) **对于任两个分划**D,D'**总有**$s(D,f)\leqslant S(D',f)$.

(4) $\sup\limits_D s(D,f)\leqslant\inf\limits_D S(D,f)$, **这里上、下确界是对**$E$**的所有可能的分划取的.**

证 (1) 显然.

关于(2)，设 $D=\{E_i\}$，比它细的 $D'=\{E'_j\}$，则

$$s(D,f)=\sum_i b_i mE_i=\sum_i b_i\left(\sum_{E'_j\subset E_i} mE'_j\right)$$

$$\leqslant\sum_i\sum_{E'_j\subset E_i} b'_j mE'_j$$

$$=\sum_j b'_j mE'_j=s(D',f).$$

同样可证 $S(D,f)\geqslant S(D',f)$.

关于(3)，对于 D,D' 作 $D''=DD'$，则 D'' 比 D,D' 都细，从而由(1)、(2)有

$$s(D,f)\leqslant s(D'',f)\leqslant S(D'',f)\leqslant S(D',f).$$

(4)是(3)的直接结果.

定义 3 设 $f(x)$是 $E\subset R^q$ $(mE<\infty)$上的有界函数，记

$$\overline{\int_E} f(x)dx=\inf_D S(D,f),\quad \underline{\int_E} f(x)dx=\sup_D s(D,f).$$

分别称为 $f(x)$在 E 上的(L)上、下积分.

如果$\overline{\int_E} f(x)dx=\underline{\int_E} f(x)dx$（由引理 2 (4) 总有$\overline{\int_E} f(x)dx\geqslant\underline{\int_E} f(x)dx$），则称 $f(x)$ 在 E 上(L)可积，且称此共同值为 $f(x)$在 E 上的(L)积分，记为 $\int_E f(x)dx$①.

以上是 R^q 中测度有限可测集上有界函数的(L)积分定义，我们看到它在形式上同 R 积分完全类似，除了"积分区域"更一般之外，主要不同之处在于采用的测度和分划的不同，即那里的 J 可测集(或区间)在这里一律换成了 L 可测集.

① 如果采用"极限式"定义 L 积分，则与"确界式"的 L 积分是不等价的.

定理1 设$f(x)$是可测集$E\subset R^q$ $(mE<\infty)$上的有界函数，则$f(x)$在E上(L)可积的充要条件为：

对任何$\varepsilon>0$，存在E的分划D使

$$S(D,f)-s(D,f)=\sum_i \omega_i mE_i<\varepsilon，这里\ \omega_i=B_i-b_i.$$

换言之，即$\inf\limits_D[S(D,f)-s(D,f)]=\inf\limits_D\sum\limits_i\omega_i mE_i=0$.

证 充分性：由于

$$s(D,f)\leqslant\underline{\int_E}f(x)dx\leqslant\overline{\int_E}f(x)dx\leqslant S(D,f),$$

得
$$0\leqslant\overline{\int_E}f(x)dx-\underline{\int_E}f(x)dx\leqslant S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon,$$

因为ε是任意的，故

$$\overline{\int_E}f(x)dx-\underline{\int_E}f(x)dx=0.$$

必要性：设$\overline{\int_E}f(x)dx=\underline{\int_E}f(x)dx$，由上、下积分的定义，对任意$\varepsilon>0$，存在分划$D_1$，$D_2$使

$$S(D_1,f)-\overline{\int_E}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{2},\quad \underline{\int_E}f(x)dx-s(D_2,f)<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此，对分划$D=D_1D_2$由引理2(2)，仍有

$$S(D,f)-\overline{\int_E}f(x)dx<\frac{\varepsilon}{2},\quad \underline{\int_E}f(x)dx-s(D,f)<\frac{\varepsilon}{2},$$

将这两式相加，即得

$$S(D,f)-s(D,f)<\varepsilon.$$

以上条件由于它的导出只利用了分划的一般性质，所以必然是比较形式的，如果我们能进一步利用可测分划的特殊性质就可以得到一个较深刻的条件。

定理 2 设 $f(x)$是可测集$E\subset R^q$ $(mE<\infty)$上的有界函数，则 $f(x)$在 E 上(L)可积的充要条件是 $f(x)$在 E 上可测.

证 充分性：设 $f(x)$在 E 上可测，且 $b<f(x)\leqslant B$，任给 $\delta>0$ 作$[b,B]$的任一分划：

$$b=y_0<y_1<\cdots y_n=B \text{ 使 } \max_i(y_i-y_{i-1})<\delta,$$

令
$$E_i=E[y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i],\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则各 E_i 可测且互不相交，$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，所以 $D=\{E_i\}$构成E的一个分划，关于它的大和与小和，显然有

$$S(D,f)\leqslant\sum_i y_i mE_i,\quad s(D,f)\geqslant\sum_i y_{i-1}mE_i,$$

这是因为 $y_{i-1}\leqslant b_i\leqslant B_i\leqslant y_i$. 从而

$$S(D,f)-s(D,f)\leqslant\sum_i(y_i-y_{i-1})mE_i\leqslant\delta mE.$$

因为$\delta>0$ 可任意小，可见 $f(x)$在E上(L)可积分(定理 1).

必要性：设 $f(x)$在 E 上(L)可积分，我们设法用两列简单函数从上下两方面来逼近 $f(x)$，从而证明 $f(x)$可测. 首先由定理 1 对$\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，依次作分划 D_n 使

$$S(D_nf)-s(D_nf)<\frac{1}{n}.$$

不妨假设这列$\{D_n\}$ 中的各分划是一个比一个细. 如果 $\{D_n\}$ 不是这样的话，只须用 $D_1^*=D_1$，$D_2^*=D_1\cdot D_2$，$\cdots$来代替好了，这时仍有

$$S(D_n^*,f)-s(D_n^*,f)<\frac{1}{n},$$

设 $D_n=\{E_1^{(n)},E_2^{(n)},\cdots,E_{m_n}^{(n)}\}$，$\sup\limits_{x\in E_i^{(n)}}f(x)=B_i^{(n)}$

$$\inf_{x\in E_i^{(n)}} f(x)=b_i^{(n)},\quad i=1,2\cdots,m_n.$$

由此出发作两列简单函数

$$g_n(x)=b_i^{(n)},\ \text{当}\ x\in E_i^{(n)};\quad h_n(x)=B_i^{(n)},\ \text{当}\ x\in E_i^{(n)},$$

$$i=1,2,\cdots,m_n;\quad n=1,2,\cdots.$$

显然 $g_n(x)\leqslant f(x)\leqslant h_n(x), h=1,2,\cdots$，而且由于 D_n 一个比一个细，还有

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots,\quad h_1(x)\geqslant h_2(x)\geqslant\cdots,$$

因此，

$$\lim_n g_n(x)=g(x),\quad \lim_n h_n(x)=h(x)$$

存在；　而且

$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，作为简单函数的极限 $g(x)$ 与 $h(x)$ 也都是可测函数（由第四章定理）.

所以如果我们能证明 $g(x)=h(x)$ a.e. 于 E，那么一定有 $f(x)=g(x)=h(x)$ a.e. 于 E，从而也就证明了 $f(x)$ 的可测性（a.e. 等于一个可测函数的函数自身也可测）.

假定 $g(x)=h(x)$ a.e. 于 E 不成立，则由于

$$E[h(x)-g(x)>0]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[h(x)-g(x)\geqslant\frac{1}{n}\right],$$

必存在 N 使 $mE\left[h(x)-g(x)\geqslant\frac{1}{N}\right]>0$. 记 $E^*=E\left[h(x)-g(x)\geqslant\frac{1}{N}\right]$. 在 E^* 上既有 $h(x)-g(x)\geqslant\frac{1}{N}$，对任意的 n 就更有 $h_n(x)-g_n(x)\geqslant\frac{1}{N}$. 也就是当 $x\in E_i^{(n)}\cap E^*$ 时，$B_i^{(n)}-b_i^{(n)}\geqslant\frac{1}{N}$，这样一来便有

$$S(D_n,f)-s(D_n,f)=\sum_i(B_i^{(n)}-b_i^{(n)})mE_i^{(n)}\geqslant$$

$$\sum_i (B_i^{(n)} - b_i^{(n)}) m(E_i^{(n)} \cap E^*)$$

$$\geqslant \frac{1}{N} \sum_i m(E_i^{(n)} \cap E^*) = \frac{1}{N} mE^*.$$

这同

$$S(D_n, f) - s(D_n, f) < \frac{1}{n} \to 0 \quad (h \to \infty)$$

矛盾，证毕.

有了这个定理，对于 R^q 中测度有限的可测集上的有界函数来说，可测与 L 可积便意味着同一回事了.

定理 3 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $E(mE<\infty)$ 上有界且 L 可积，则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$（但 $\inf\limits_{x \in E} |g(x)| > 0$），$|f(x)|$ 在 E 上都是 L 可积的.

证 这是定理 2 和第四章 § 1 定理的直接推论.

L 积分与 R 积分的关系.

定理 4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 R 可积，则它必同时 L 可积，且有相同的积分值

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx①.$$

证 首先 $f(x)$ 是有界的，其次对于 $[a, b]$ 的任一分划

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

总对应着一个可测分划

$$D = \{[a, x_1], (x_1, x_2], \cdots, (x_{n-1}, b]\},$$

其中第 i 个小区间记作 E_i. 依定理 2 中的记号，我们有

$$m_i \leqslant b_i, \quad M_i \geqslant B_i, \quad \Delta x_i = mE_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

---

① 今后我们将 $\int_{[a,b]} f(x)dx$ 写作 $(L)\int_a^b f(x)dx$ 或干脆写成 $\int_a^b f(x)dx$.

故有

$$s(T,f)\leqslant s(D,f)\leqslant\underline{\int}_{[a,b]}f(x)dx\leqslant\overline{\int}_{[a,b]}f(x)dx\leqslant S(D,f)$$

$$\leqslant S(T,f).$$

从而

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx=\sup_T s(T,\ f)\leqslant\underline{\int}_{[a,b]}f(x)dx\leqslant\overline{\int}_{[a,b]}f(x)dx$$

$$\leqslant\inf_T S(T,f)=\overline{\int}_a^b f(x)dx,$$

由此即得所要结果.

另一方面却存在 R 不可积但 L 可积的函数，例如在 $[0,1]$ 上的狄里克雷函数是 R 不可积的，但作为简单函数是可测的，所以它是 L 可积的，可见 L 积分是 R 积分的推广，在 R^n 的情况也是如此。

§3. 勒贝格积分的性质

由于 L 积分定义与 R 积分定义在形式上的相似，人们自然会期待 R 积分的许多性质在 L 积分照样得到保留. 在下面各定理中我们假设 E 是 R^q 中测度有限的可测集. $f(x)$ 等函数是 E 上的有界函数，又 L 可积就简称可积.

定理 1① (1) **设 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 的任何可测子集上也可积.**

又设 $f(x)$ 定义于 $E=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$，且在 A，B 上分别可积，则 $f(x)$ 在 E 上也可积分，且

$$\int_E f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx \tag{1}$$

① 前节定理3中一些结果在本定理中重见，为的是以后推广时可以借用.

(2) 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)+g(x)$ 在 E 上也可积且

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx \tag{2}$$

(3) 设 $f(x)$ 在 E 上可积，则对任何常数 c，$cf(x)$ 也在 E 上可积且

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx.$$

(4) 设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx.$$

特别当 $b\leqslant f(x)\leqslant B$ 时有 $bmE\leqslant\int_E f(x)dx\leqslant BmE$.

(5) 设 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $|f(x)|$ 在 E 上也可积，且

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|dx.$$

证 我们只证(1)，(2)中两个等式，其余留作练习.

关于(1)式，设 $f(x)$ 在 A，B 上都可积，对任何 $\varepsilon>0$，存在 A 的分划 D_A 及 B 的分划 D_B 使

$$S(D_A, f)\leqslant\int_A f(x)dx+\varepsilon/2, \qquad S(D_B, f)\leqslant\int_B f(x)dx+\varepsilon/2.$$

但是将这两分划合并而得分划 $D_E=D_A+D_B$，显然是 E 的一个可测分划，因此

$$\int_E f(x)dx\leqslant S(D_E, f)=S(D_A, f)+S(D_B, f)\leqslant$$

$$\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，使得

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx.$$

同样可得相反的不等式.

关于(2)式，设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可积，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 E 的分划 D_1, D_2 使

$$S(D_1, f)\leqslant\int_E f(x)dx+\varepsilon/2, \quad S(D_2, f)\leqslant\int_E g(x)dx+\varepsilon/2.$$

作分划 $D=D_1\cdot D_2$，则仍有

$$S(D, f)\leqslant\int_E f(x)dx+\varepsilon/2, \quad S(D, g)\leqslant\int_E g(x)dx+\varepsilon/2,$$

但由于不等式

$$\begin{aligned}\inf f(x)+\inf g(x)\leqslant\inf[f(x)+g(x)]&\leqslant\sup[f(x)+g(x)]\\ &\leqslant\sup f(x)+\sup g(x),\\ &\quad x\in E_i,\ i=1, 2, \cdots, n.\end{aligned}$$

又由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，立得

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx\leqslant\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx,$$

同样可得相反的不等式，证毕.

下面两个定理虽然在 R 积分中也有效（因 R 积分也可作 L 积分看），但是在那里通常不予讨论.

定理 2 (1) 设 $f(x)$ 在 E 上可积分，$f(x)\geqslant0$ 且 $\int_E f(x)dx=0$，则 $f(x)=0$ a.e. 于 E;

(2) 设 $f(x)$ 在 E 上可积分，则对任何可测集 $A\subset E$，有 $\lim\limits_{mA\to0}\int_A f(x)dx=0$（这性质称为 L 积分的绝对连续性）.

证 关于(1)，E 可表为

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]\cup E[f=0],$$

令 $E_n=E\left[f\geqslant\frac{1}{n}\right]$，则它是可测集. 但

$$0=\int_E f(x)dx-\int_{E_n} f(x)dx+\int_{E\setminus E_n} f(x)dx$$

$$\geqslant\int_{E_n} f(x)dx\geqslant\frac{1}{n}mE_n,$$

故 $mE_n=0$, 从而 $mE[f>0]=0$.

关于(2), 设 $|f(x)|\leqslant K$, 当 $x\in E$, 则

$$\left|\int_A f(x)dx\right|\leqslant\int_A |f(x)|dx\leqslant K\cdot mA\to 0 \qquad (\text{当 } mA\to 0),$$

证毕.

§4. 一般可积函数

我们迄今仅仅限于在"积分区域"的测度有限，并且被积函数有界的情况下讨论 L 积分，原因是只在这时大、小和数才能保证是有限的. 在本节中我们要将"积分区域"的测度有限及被积函数的有界这两个限制去掉，使积分定义能适用于更加广泛的函数类. 这一扩张将分两步来完成.

第一步，非负函数情形.

设 $f(x)$ 定义在可测集 $E<R^q$(不要求 $mE<\infty$)上的非负实函数(不要求有界). 则 E 总可以用一列逐步扩大的测度有限的可测集 E_n 来逼近:

$$E_1\subset E_2\subset\cdots,\ \lim_n E_n=E.$$

例如，取 $E_n=E\cap K_n$, 其中

$$K_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_q)\mid |x_i|\leqslant n,\ i=1,2,\cdots,q\},$$

即以原点为中心, $2n$ 为边长的闭区间. 同时 $f(x)$ 总可用一列定义在 E_n 上而函数值随着 n 逐渐增大的有界函数 $f_n(x)$ 来逼近:

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots,\ \lim_n f_n(x)=f(x).$$

例如，取 $f_n(x)=[f(x)]_n=\min\{f(x),n\}=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant n,\\ n, & \text{当 } f(x)>n.\end{cases}$

为了利用已知的 L 积分概念，我们还要求每个 $f_n(x)$ 在 E_n 上都是可测的，由于 $E[f>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n[f_n>a]$，这也就是要求 $f(x)$ 在 E 上是可测的．再由于 $\{E_n\}$ 和 $\{f_n(x)\}$ 是单调列的原由，总有

$$0\leqslant\int_{E_1}f_1(x)dx\leqslant\int_{E_2}f_2(x)dx\leqslant\cdots,$$

因此

$\lim\limits_n\int_{E_n}f_n(x)dx$ 必存在（可能是 $+\infty$）．不仅如此，我们还可以证明这一极限是不依赖于逼近列 $\{E_n\}$ 和 $\{f_n(x)\}$ 的选择而唯一确定的①，而且，如果 $mE<\infty$ 且 $f(x)$ 在 E 上是有界的，则恰有以下等式

$$\lim_n\int_{E_n}f(x)dx=\int_E f(x)dx\text{②}.$$

因此对于非负函数来说，我们自然给积分概念作如下的推广．

定义 1 设 $f(x)\geqslant 0$ 在可测集 $E\subset R^q$ 上可测，这时我们定义

$$\int_E f(x)dx=\lim_n\int_{E_n}[f(x)]_n dx\text{③}$$

称为 $f(x)$ 在 E 上的 L 积分．（其中 E_n 与 $[f(x)]_n$ 的意义同上）．

第二步，一般函数（不限于非负）的情形．

令 $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$，则 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，不难看出，如果 $f(x)$ 在 E 上可测，$f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 在

---

① 这由下一节列维（Levi）定理容易被证明，目前只要知道有此事就够了．

② 只须就 $E_n=E\cap K_n$，$f_n(x)=[f(x)]_n$ 来证明．利用 L 积分的绝对连续性即可．

③ 如果我们只关心 $mE<\infty$ 的情形（例如概率论中 $mE\leqslant 1$）定义也可从简．令

$$[f(x)]_n=\min\{f(x),n\},\ x\in E,\ n=1,2,\cdots,$$

而定义

$$\int_E f(x)dx=\lim_n\int_E[f(x)]_n dx.$$

E上也可测. 反之亦然. 并且对于测度有限的可测集E上的可积函数 $f(x)$总有

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx.$$

因此对于一般函数来说,我们自然给积分概念作如下推广

定义 2 设$f(x)$在可测集 $E\subset R^q$ 上可测. 如果在定义 1 的意义下的$\int_E f^+(x)dx$与$\int_E f^-(x)dx$不同时为$+\infty$, 则我们称 $f(x)$在E 上积分确定,并定义$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$ 为 $f(x)$在E上的L积分,特别当此积分有限时, 称 $f(x)$在E上L可积.

要注意,凡非负可测函数都是积分确定的,若积分有限, 在此定义意义下是L可积的.

又凡在测度有限的可测集上的可积函数, 一定也是在此定义意义下L可积的.

我们现在来研究推广后的L积分的初等性质.

定理 1 (1) **设** $mE=0$(但 $E\neq\varnothing$),**则对**E**上的任何实函数** $f(x)$**都有**$\int_E f(x)dx=0$;

(2) **设** $f(x)$**在**E**上**L**可积,则** $mE[|f|=\infty]=0$,**即** $f(x)$**在**E**上 a.e.** 有限;

(3) **设** $f(x)$**在**E**上积分确定,则** $f(x)$**在**E**上任一可测子集** A **上也积分确定.** 又如 $E=A\cup B$, A与B皆可测且 $A\cap B=\varnothing$,则

$$\int_E f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx;$$

(4) **设** $f(x)$**在**E**上积分确定, 且** $f(x)=g(x)$**a.e.于** E, **则** $g(x)$**在** E **上也积分确定, 且**$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$;

(5) **设** $f(x)$, $g(x)$**在** E **上非负可测,则**

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx;$$

(6) **设 $f(x)$, $g(x)$ 在 E 上积分确定且 $f(x)\leqslant g(x)$, 则**

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx.$$

证 以上诸性质只须利用定义 1 和 2 及前节定理 1 即可简单地得到证明, 为示范起见, 只证其中(2)与(5).

关于(2), 令

$$E_+=E[f=+\infty], E_-=[f=-\infty],$$

则对任何 $n\geqslant N$ 有

$$+\infty>\int_E f^+(x)dx\geqslant\int_{E_n}[f^+(x)]_n dx\geqslant\int_{E_N\cap E_+}[f^+(x)]_n dx$$
$$=n\cdot m(E_N\cap E_+),$$

可见 $m(E_N\cap E_+)=0$, $N=1,2,\cdots$, 从而

$$mE_+=\lim_N m(E_N\cap E_+)=0,$$

同样可知 $mE_-=0$.

关于(5), 对任何 n, 在 E_n 上成立不等式

$$[f(x)+g(x)]_n\leqslant[f(x)]_n+[g(x)]_n\leqslant[f(x)+g(x)]_{2n},$$

因此由前节定理 1 有

$$\int_{E_n}[f(x)+g(x)]_n dx\leqslant\int_{E_n}[f(x)]_n dx+\int_{E_n}[g(x)]_n dx$$
$$\leqslant\int_{E_n}[f(x)+g(x)]_{2n}dx\leqslant\int_{E_{2n}}[f(x)+g(x)]_{2n}dx,$$

令 $n\to\infty$, 即得, 证毕.

由于(3) 可知, 一个积分确定的函数如果在一个零测度集上随意改变函数值, 并不影响它的积分值, 因此, 即使一个函数 $f(x)$ 在 E 的一个零测度子集 E_0 上没有定义, 只要 $\int_{E\setminus E_0}f(x)dx$ 有意义, 我们仍可认为 $\int_E f(x)dx$ 有意义, 而且不妨约定

$$\int_E f(x)dx=\int_{E\setminus E_0} f(x)dx.$$

也可补充定义 $f(x)$在 E_0 上的函数值，比如 $f(x)=0$.

定理 2 前节定理 1 和定理 2 对于一般可积函数也成立.

证 只就线性关系，绝对可积性及绝对连续性加以证明.

(1) 线性关系. 设 $f(x),g(x)$在E上可积，不失一般性，假设它们都是有限值函数.

由于

$$(f(x)+g(x))^+\leqslant f^+(x)+g^+(x),$$
$$(f(x)+g(x))^-\leqslant f^-(x)+g^-(x)$$

及定理 1 的(5)与(6)，可知 $f(x)+g(x)$ 在E上可积分. 其次，由于

$$\begin{aligned}&(f^+(x)-f^-(x))+(g^+(x)-g^-(x))\\&=f(x)+g(x)\\&=(f(x)+g(x))^+-(f(x)+g(x))^-,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&(f(x)+g(x))^++f^-(x)+g^-(x)\\&=(f(x)+g(x))^-+f^+(x)+g^+(x),\end{aligned}$$

由定理 1,(5)便有

$$\begin{aligned}&\int_E(f(x)+g(x))^+dx+\int_E f^-(x)dx+\int_E g^-(x)dx\\&=\int_E(f(x)+g(x))^-dx+\int_E f^+(x)dx+\int_E g^+(x)dx,\end{aligned}$$

移项得

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

设 $f(x)\geqslant0$ 在E上可积，对正数 c，下面证明

$$\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx \tag{1}$$

事实上，

$$\int_E f(x)dx=\int_E\Big[\overbrace{\frac{1}{n}f(x)+\cdots+\frac{1}{n}f(x)}^{n项}\Big]dx=n\int_E\frac{1}{n}f(x)dx$$

所以 $\int_E\frac{1}{n}f(x)dx=\frac{1}{n}\int_E f(x)dx$. 从而又有

$$\frac{m}{n}\int_E f(x)dx=\overbrace{\int_E\frac{1}{n}f(x)dx+\cdots+\int_E\frac{1}{n}f(x)dx}^{m项}$$

$$=\int_E\Big[\overbrace{\frac{1}{n}f(x)+\cdots+\frac{1}{n}f(x)}^{m项}\Big]dx$$

$$=\int_E\frac{m}{n}f(x)dx.$$

设 c 为正无理数，取两个正有理数列 $\{r_n\}$ 与 $\{r_n'\}$ 使 $r_n\to c$，$r_n'\to c$，且 $r_n<c<r_n'$，于是

$$r_n\int_E f(x)dx=\int_E r_nf(x)dx\leqslant\int_E cf(x)dx\leqslant\int_E r_n'f(x)dx$$

$$=r_n'\int_E f(x)dx.$$

令 $n\to\infty$，得 $c\int_E f(x)dx=\int_E cf(x)dx$.

不难证明对 $c<0$ 时，式(1)仍成立，从而对一般情况，即 $f(x)$ 不限于非负的，式(1)还是成立的.

(2) 绝对可积性. 设$f(x)$在E上可积分，由于$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$，由定理 1,(5)得

$$\int_E|f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx,$$

所以$|f(x)|$在E上可积且

$$\int_E|f(x)|dx=\int_E f^+(x)dx+\int_E f^-(x)dx$$

$$\geqslant\left|\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx\right|=\left|\int_E f(x)dx\right|.$$

(3) 绝对连续性. 设 $f(x)$在 E 上可积, 则$|f(x)|$在 E 上也可积, 从而对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使

$$\int_E |f(x)|dx-\int_{E_N}[|f(x)|]_N dx<\varepsilon/2.$$

另一方面, 由于有界可积函数有积分的绝对连续性, 故对此 ε, 又存在 $\delta>0$, 使当 $A\subset E_N$ 且 $mA<\delta$ 时, 有$\int_E[|f(x)|]_N dx<\varepsilon/2$, 因此当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时便有

$$\left|\int_A f(x)dx\right|\leqslant\int_A|f(x)|dx$$

$$=\int_{A\setminus A\cap E_N}|f|dx+\int_{A\cap E_N}(|f|-[|f|]_N)dx+\int_{A\cap E_N}[|f|]_N dx$$

$$\leqslant\int_{E\setminus E_N}|f|dx+\int_{E_N}(|f|-[|f|]_N)dx+\int_{A\cap E_N}|f|_N dx$$

$$=\left(\int_E|f|dx-\int_{E_N}[|f|]_N dx+\int_{A\cap E_N}[|f|]_N dx<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\right.$$

即当 $mA\to0$ 时, $\int_A f(x)dx\to0$. 证毕.

值得注意的是由于 L 可积函数具有绝对可积性, 所以 L 积分是一种绝对收敛积分. 而 R 广义积分不必为绝对收敛. 因此 L 积分虽是 R 积分的推广, 却非 R 广义积分的推广.

例如在 R 广义积分理论中, 无穷积分

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

而在 L 积分理论中, $\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=\infty$, 所以$\frac{\sin x}{x}$不是$(0,\ +\infty)$上函的 L 可积数.

例 设 $f(x)$在 $E=[a,b]$上可积, 则对任何 $\varepsilon>0$, 必存在 E 上

的连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon.$$

证 设 $e_n=E[|f|>n]$，由于 $f(x)$在 E 上 a.e. 有限，故 $me_n \to 0, (n\to\infty)$。

由积分的绝对连续性，对任何 $\varepsilon>0$，必存在 N，使

$$N\cdot me_N\leqslant\int_{e_N}|f(x)|\,dx<\varepsilon/4.$$

令 $B_N=E\setminus e_N$，在 B_N 上利用鲁津定理，存在闭集 $F_N\subset B_N$ 和在 R^1 上的连续函数 $\varphi(x)$使

(1) $m(B_N\setminus F_N)<\dfrac{\varepsilon}{4N}$;

(2) $x\in F_N$ 时，$f(x)=\varphi(x)$，且 $\sup\limits_{x\in R^1}|\varphi(x)|=\sup\limits_{x\in F_N}|f(x)|\leqslant N$.

所以
$$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx\leqslant\int_{e_N}|f(x)-\varphi(x)|\,dx+\int_{B_N}|f(x)-\varphi(x)|\,dx$$

$$\leqslant\int_{e_N}|f(x)|\,dx+\int_{e_N}|\varphi(x)|\,dx+\int_{B_N\setminus F_N}|f(x)-\varphi(x)|\,dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+N\cdot me_N+2N\cdot\frac{\varepsilon}{4N}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

§5. 积分的极限定理

本节主要讨论积分与极限的交换问题，我们将看到这问题在 L 积分范围内得到比在 R 积分范围内远为完满的解决，这正是 L 积分的最大成功之处。

我们先讨论一般可积函数的情形，然后再讨论非负可测函数的情形。

定理 1（勒贝格控制收敛定理） 设

(1) $\{f_n(x)\}$是可测集E上的可测函数列;

(2) $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ a.e. 于E, $n=1,2,\cdots$, 且$F(x)$在E上可积分(称$\{f_n(x)\}$为$F(x)$所控制, 而 $F(x)$叫控制函数);

(3) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$,

则$f(x)$在E上可积分且

$$\lim_n \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证 由于$f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 根据 Riesz 定理, 存在子列$\{f_{n_i}(x)\}$ a.e.收敛于$f(x)$, 由$|f_{n_i}(x)|\leqslant F(x)$ a.e. 于E, 得$|f(x)|\leqslant F(x)$ a.e.于E, 因为$F(x)$可积, 得到$f(x)$在E上是可积的. 同样说明每个$f_n(x)$在E上是可积的.

因为$F(x)$在E上可积, 由L积分的定义, 对任何$\varepsilon>0$, 存在$k>0$, 使

$$\int_E F(x)dx < \int_{E_k}[F(x)]_k dx + \frac{\varepsilon}{5},$$

由此得

$$\int_{E\setminus E_k} F(x)dx = \int_E F(x)dx - \int_{E_k} F(x)dx < \frac{\varepsilon}{5}.$$

又由积分的绝对连续性得知, 存在$\delta>0$, 使可测集$e\subset E$且$me<\delta$时,

$$\int_e F(x)dx < \frac{\varepsilon}{5},$$

对此δ, 又由$f_n(x)\Rightarrow f(x)$, 所以存在$N>0$, 使当$n\geqslant N$时,

$$mE_k\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{5(mE_k+1)}\right]<\delta.$$

令

$$H_n = E_k\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{5(mE_k+1)}\right],$$

则

$$E_k \setminus H_n = E_k\left[|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{5(mE_k+1)}\right],$$

由于 $E = H_n \cup (E_k \setminus H_n) \cup (E \setminus E_k)$，则当 $n \geqslant N$ 时，

$$\left|\int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx\right| = \left|\int_E [f_n(x) - f(x)]dx\right|$$

$$\leqslant \int_{E_k \setminus H_n} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_{E \setminus E_k} |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$+ \int_{H_n} |f_n(x) - f(x)|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{5(mE_k+1)} mE_k$$

$$+ 2\int_{E \setminus E_k} F(x)dx + 2\int_{H_n} F(x)dx < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

证毕.

推论 1 将条件(3)改为 $f_n(x) \to f(x)$ a.e. 于 E，定理结论仍成立.

推论 2 设 $mE < \infty$，将条件(2)改为 $|f_n(x)| \leqslant K$(常数) $n = 1, 2, \cdots$，如果 $f_n(x) \to f(x)$ a.e. 于 E 或 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，则定理结论还成立.

两个推论的证明留作练习.

定理 2 列维(Levi) 设 $\{f_n(x)\}$ 为可测集 $E \subset R^q$ 上的一列非负可测函数，且在 E 上有 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$，$n = 1, 2, \cdots$，(单调列) 令 $f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$，则

$$\lim_n \int_E f_n(x)\, dx = \int_E f(x)dx.$$

证 首先，由于 $\{f_n(x)\}$ 是单调列，所以

$f(x) = \lim\limits_n f_n(x)$ 存在，可测而且 $f_n(x) \leqslant f(x)$，

故由前节定理 1 的(6)，$\int_E f_n(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx$，从而得

$$\lim_n \int_E f_n(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx,$$

其次，为了得到相反的不等式，对于固定的 $N>0$，考虑可测函数列:

$$[f_N(x)]_N, [f_{N+1}(x)]_N, \cdots, [f_n(x)]_N, \cdots$$

在 E_N 上它们都有定义而且不难证明

$$\lim_n [f_n(x)]_N = [f(x)]_N \tag{1}$$

事实上，设 $x_0 \in E_N$，如果存在 $n_0 \geqslant N$ 使 $f_{n_0}(x_0) > N$，则对 $n \geqslant n_0$，有 $f_n(x_0) > N$，从而 $f(x_0) > N$，故(1)式成立($N=N$)．如果对任何 $n \geqslant N$，有 $f_n(x_0) \leqslant N$，则 $f(x_0) \leqslant N$．这时(1)式成为

$$\lim_n f_n(x_0) = f(x_0).$$

总之无论哪种情况，(1)式都成立．因此

$$\int_{E_N} [f(x)]_N dx = \int_{E_N} \lim_n [f_n(x)]_N dx$$

$$= \lim_n \int_{E_N} [f_n(x)]_N dx \leqslant \lim_n \int_E f_n(x) dx.$$

(第二等式由控制收敛定理得知)．

故有 $\int_E f(x) dx = \lim_N \int_{E_N} [f(x)]_N dx \leqslant \lim_n \int_E f_n(x) dx.$

所以得到 $\lim_n \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$ 证毕．

定理 3 (L 逐项积分定理) **设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 $E \subset R^q$ 上一列非负可测函数，则**

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) dx.$$

证 设 $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x), n=1, 2, \cdots$，则 $\{g_n(x)\}$ 为 E 上非负可测函数的递增序列．由 Levi 定理有

$$\int_E \lim_n g_n(x)\,dx = \lim_n \int_E g_n(x)\,dx \tag{1}$$

但是 $\lim\limits_n g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\int_E g_n(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_E f_i(x)\,dx$,

代入(1)式即得. 证毕.

定理 4（积分的可数可加性） **设 $f(x)$ 在可测集 $E \subset R^q$ 上积分确定，且 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$，其中各 E_i 为互不相交的可测集，则**

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)\,dx.$$

证 设

$$f_n(x) = \begin{cases} f^+(x), & x \in E_n, \\ 0, & x \in E \setminus E_n, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

则各 $f_n(x)$ 为 E 上非负可测函数且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f^+(x)$，由前节定理 1 的(3)，得

$$\int_E f_n(x)\,dx = \int_{E_n} f^+(x)\,dx,$$

应用逐项积分定理即得

$$\int_E f^+(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f^+(x)\,dx,$$

同样可得
$$\int_E f^-(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^-(x)\,dx.$$

由于 $f(x)$ 在 E 上积分确定，故上面两个正项级数中至少有一个是收敛的. 因此两式相减即得

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^{+}(x) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^{-}(x) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f^{+}(x) dx - \int_{E_n} f^{-}(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) dx.$$

证毕.

定理 5 (Fatou 引理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 $E \subset R^q$ 上一列非负可测函数, 则

$$\int_E \varliminf_n f_n(x) dx \leqslant \varliminf_n \int_E f_n(x) dx.$$

证 设 $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots,\}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $\{g_n(x)\}$ 为 E 上非负可测函数递增列且

$$\varliminf_n f_n(x) = \lim_n g_n(x)$$

由 Levi 定理

$$\int_E \varliminf_n f_n(x) dx = \int_E \lim_n g_n(x) dx = \lim_n \int_E g_n(x) dx$$

$$= \varliminf_n \int_E g_n(x) dx$$

$$\leqslant \varliminf_n \int_E f_n(x) dx. \text{ (因 } g_n(x) \leqslant f_n(x)\text{)}.$$

证毕.

值得注意的是, Fatou 引理中的不等号是可以实现的, 例如, 设

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \text{ 或 } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2n}. \end{cases}$$

因为 $\varliminf_n f_n(x) = 0$, 所以 $\int_0^1 \varliminf_n f_n(x) dx = 0$. 又有

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/2n} 0 \cdot dx + \int_{1/2n}^{1/n} n dx + \int_{1/n}^{1} 0 \cdot dx = \frac{1}{2},$$

故得

$$\underline{\lim_n}\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}.$$

所以 $$\int_0^1 \underline{\lim_n} f_n(x)dx<\underline{\lim_n}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

定理 6 设 $f(x,t)$为矩形

$$\{(x,t)\mid a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$$

上的二元函数，固定 $t\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t)$为 x 的可积函数. 如果对几乎所有 x，函数 $f(x,t)$对 t 有偏导数，并且存在$[a,b]$上 L 可积函数 $g(x)$，对 $t\in[\alpha,\beta]$及充分小的$|h|$有

$$\left|\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right|\leqslant g(x)\quad \text{a.e. 于}[a,b] \tag{1}$$

则$\int_a^b f(x,t)dx$在$[\alpha,\beta]$上有导函数，且

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

证 任取 $t\in[\alpha,\beta]$，并任取一列 $h_n\to 0(h_n\neq 0)$，使 $t+h_n\in[\alpha,\beta]$，则当 $n\to\infty$时，对$[a,b]$中几乎所有 x，都有

$$\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\to\frac{\partial}{\partial t}f(x,t).$$

再由(1)式，利用定理 1，便知

$$\lim_n\int_a^b\left[\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\right]dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$$ 证毕.

例 证明

$$\lim_n\int_0^\infty\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dx=0.$$

证 设

$$f_n(x)=\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x,$$

不难验证，当 $n\to\infty$时，$f_n(x)\to 0$.

又因 $\left(\frac{\ln t}{t}\right)'=\frac{1-\ln t}{t^2}<0$, 当 $t\geqslant 3$,

所以, 当 $n\geqslant 3, x\geqslant 0$ 时,

$$\frac{\ln(x+n)}{n}=\frac{n+x}{n}\frac{\ln(x+n)}{x+n}\leqslant\frac{n+x}{n}\frac{\ln 3}{3}\leqslant\frac{\ln 3}{3}(1+x),$$

从而便得

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{\ln 3}{3}(1+x)e^{-x}.$$

但是不等式右边的函数, 在$[0,+\infty)$上是L可积的. 由定理1的推论1, 即得

$$\lim_n\int_0^\infty f_n(x)dx=\int_0^\infty\lim_n f_n(x)dx=0. \qquad 证毕.$$

§6. 勒贝格积分的几何意义·富比尼(Fubini)定理

到目前为止, 我们讲测度也好, 积分也好, 都是就同一个n维空间来考虑的. 现在我们将考虑不同维空间的可测集及测度, 并研究其间的关系. 这样就不仅可以得到L积分的几何解释, 而且还可以导出重积分化累次积分的重要公式.

定义1 设$A\subset R^p$, $B\subset R^q$为两个非空点集, 则R^{p+q}中的点集$\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$①称为$A$与$B$的直积, 记作$A\times B$.

注意, 一般说来, $A\times B\neq B\times A$.

例1 $R^{p+q}=R^p\times R^q$.

例2 二维区间

$\{(x,y)\mid a_1\leqslant x\leqslant b_1, a_2\leqslant y\leqslant b_2\}=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$.

---

① 这里是

$\{(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q)\mid(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in A,(y_1,y_2,\cdots,y_q)\in B\}$

的简写.

例 3 三维柱体

$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}\times[0,1]$.

定义 2 设 E 是 R^{p+q} 中一点集，x_0 是 R^p 中一固定点，则 R^q 中的点集

$$\{y\in R^q\mid (x_0,y)\in E\}$$

称为 E 关于 x_0 的截面(图 5.1)，记为 E_{x_0}①.

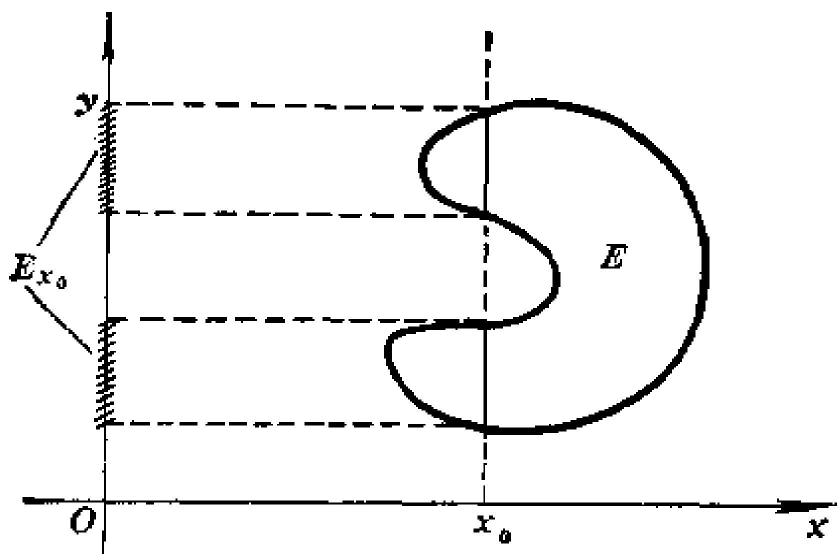


图 5.1

容易验证：直积与截面具有下列简单性质：

(1) 如果 $A_1\subset A_2$，则 $A_1\times B\subset A_2\times B$;

(2) 如果 $A_1\cap A_2=\varnothing$，则 $(A_1\times B)\cap(A_2\times B)=\varnothing$;

(3)
$$\left(\bigcup_i A_i\right)\times B=\bigcup_i (A_i\times B),$$
$$\left(\bigcap_i A_i\right)\times B=\bigcap_i (A_i\times B);$$

(4) $(A_1\setminus A_2)\times B=(A_1\times B)\setminus(A_2\times B)$;

---

① 当然也可定义 E 关于 $y_0\in R^q$ 的截面

$$\{x\in R^p\mid (x,y_0)\in E\}=E_{y_0}.$$

(5) 如果 $A_1\subset A_2$，则$(A_1)_x\subset(A_2)_x$；

(6) 如果 $A_1\cap A_2=\varnothing$，则$(A_1)_x\cap(A_2)_x=\varnothing$；

(7) $\left(\bigcup\limits_i A_i\right)_x=\bigcup\limits_i(A_i)_x$，　$\left(\bigcap\limits_i A_i\right)_x=\bigcap\limits_i(A_i)_x$；

(8) $(A_1\setminus A_2)_x=(A_1)_x\setminus(A_2)_x$.

例 4 设 $F_1\subset R^p$，$F_2\subset R^q$ 为闭集，$G_1\subset R^p$，$G_2\subset R^q$ 为开集，则 $F_1\times F_2$，$G_1\times G_2$ 分别为 R^{p+q} 中的闭集和开集.

证 由于 G_1 与 G_2 为开集，所以对任何 $x=(x_1,x_2)\in G_1\times G_2$，存在邻域 $U_1(x_1,\ r)\subset G_1$ 与 $U_2(x_2,\ r)\subset G_2$，不难证明 $U(x,r)\subset U_1(x_1,r)\times U_2(x_2,r)$，从而 $U(x,r)\subset G_1\times G_2$，故 $G_1\times G_2$ 为开集.

因为 $F_1\times F_2\subset\overline{F_1\times F_2}$. 下面证明相反的包含关系. 设 $x=(x_1,x_2)\in\overline{F_1\times F_2}$，但 $x\overline{\in}F_1\times F_2$，则 $x_1\overline{\in}F_1$，或 $x_2\overline{\in}F_2$. 不妨设 $x_1\overline{\in}F_1$，由于 F_1 是闭集，用前结论，$CF_1\times R^q$ 是开集且 $x\in CF_1\times R^q$. 又因为

$$(CF_1\times R^q)\cap(F_1\times F_2)=\varnothing,$$

所以 $x\overline{\in}\overline{F_1\times F_2}$（矛盾），故 $\overline{F_1\times F_2}\subset F_1\times F_2$，于是得到 $F_1\times F_2=\overline{F_1\times F_2}$，即 $F_1\times F_2$ 为 R^{p+q} 中的闭集.

下面的重要定理给我们提供了一个由低维测度求高维测度的工具.

定理 1　（截面定理）　**设 $E\subset R^{p+q}$ 是可测集，则**

(1) 对于 R^p 中几乎所有的点 x，E_x 是 R^q 中可测集；

(2) mE_x 作为 x 的函数，它是 R^p 上 a.e. 有定义的可测函数；

(3) $mE=\int_{R^p}mE_x dx$.

证 我们只对 E 是有界集加以证明，因无界集总可以表示为可数个有界可测集的并.

从特殊到一般分五步来证明.

(1) E 为区间(左开右闭)的情况.

设 $E=\Delta\times\Delta_1$, 其中 Δ,Δ_1 分别是 R^p 及 R^q 中左开右闭区间. 则

$$E_x=\begin{cases}\Delta_1, & x\in\Delta,\\ \varnothing, & x\overline{\in}\Delta,\end{cases}$$ 故 E_x 为 R^q 中可测集.

又 $mE_x=\begin{cases}|\Delta_1|, & x\in\Delta\\ 0, & x\overline{\in}\Delta,\end{cases}$ 故 mE_x 为 R^p 上简单函数.

最后由区间体积的定义得

$$mE=|\Delta\times\Delta_1|=|\Delta|\cdot|\Delta_1|=\int_{R^p} mE_x dx.$$

(2) E 为开集情形.

设 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 其中各 I_i 是 R^{p+q} 中互不相交的左开右闭区间,

则 $E_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i)_x$, 由(1)各 $(I_i)_x$ 是 R^q 中可测集, 所以 E_x 也可测.

又因各 $(I_i)_x$ 互不相交, 所以

$$mE_x=\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)_x,$$

由(1)各 $m(I_i)_x$ 都是 R^p 上的可测函数, 所以 mE_x 也是可测的.

最后

$$mE=\sum_{i=1}^{\infty} mI_i=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{R^p} m(I_i)_x dx$$

$$=\int_{R^p}\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)_x dx=\int_{R^p} mE_x dx.$$

(3) E 是 G_δ 型集情况.

设 $E=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, 其中各 G_i 是 R^{p+q} 中的开集, 且 $G_1\supset G_2\supset\cdots$,

(G_δ 型集总可以办到这点). 则 $E_x=\bigcap_{i=1}^{\infty}(G_i)_x$, 由(2)各$(G_i)_x$都是 R^q 中可测集, 所以 E_x 也是可测的.

又因 $m(G_1)_x<\infty$, 且$(G_1)_x\supset(G_2)_x\supset\cdots$, 根据第三章§3定理9, 所以

$$mE_x=\lim_i m(G_i)_x,$$

由(2)各 $m(G_i)_x$ 都是 R^p 中的 x 的可测函数, 因此 mE_x 也可测.

最后 $mE=\lim_n mG_n=\lim_n\int_{R^p}m(G_n)_x dx$

$$=\int_{R^p}\lim_n m(G_n)_x dx=\int_{R^p}mE_x dx,$$

(第二等式由(2), 第三等式由控制收敛定理).

(4) E 是零集情形

设E是 R^{p+q} 中零集(即零测度集), 这时总存在 R^{p+q} 中 G_δ 型集 $G\supset E$, 使 $mE=mG=0$, 但由(3)有 $0=mG=\int_{R^p}mG_x dx$, 所以 $mG_x=0$ a.e. 于 R^p(§3定理2(1)之推广). 于是再由 $E_x\subset G_x$, 就有 $mE_x=0$ a.e. 于 R^p, 且 $mE=\int_{R^p}mE_x dx$.

(5) E 是有界可测集.

设 $E=G\setminus N$, 其中G与N分别为 R^{p+q} 中 G_δ 型集及零集, 且 $G\supset E$(第三章§4定理6), 由于 $E_x=G_x\setminus N_x$, 由(3), (4)E_x a.e. 是 R^q 中可测集. 又 $mE_x=mG_x-mN_x=mG_x$ a.e. 于 R^p, 故由(3), mE_x 是 R^p 上 a.e. 有定义的可测函数.

最后 $mE=mG=\int_{R^p}mG_x dx=\int_{R^p}mE_x dx.$ 证毕.

定理 2 设 A, B 分别是 R^p, R^q 中的可测集, 则 $A\times B$ 是R^{p+q}中的可测集且 $m(A\times B)=mA\cdot mB$.

证　先证 $A\times B$ 是 R^{p+q} 中可测集，不妨设 A, B 有界，$A\subset I$, $B\subset I^*$(I,I^* 为有限区间).

由于 A,B 可测，对任何 $\varepsilon>0$，总存在 R^p 中的开集 G 及闭集 F 和 R^q 中的开集 G^* 及闭集 F^* 使

$$F\subset A\subset G\subset I,\quad F^*\subset B\subset G^*\subset I^*,$$

且

$$m(G\setminus F)<\varepsilon/2|I^*|\quad 及\quad m(G^*\setminus I^*)<\varepsilon/2|I|.$$

由最后的两个不等式，又分别存在 R^p, R^q 中开区间列 $\{I_i\}$ 及 $\{I_i^*\}$ 使

$$G\setminus F\subset\bigcup_i I_i,\quad G^*\setminus F^*\subset\bigcup_i I_i^*.$$

且
$$\sum_i|I_i|<\varepsilon/2|I^*|,\quad \sum_i|I_i^*|<\varepsilon/2|I|,$$

由例 1 知 $G\times G^*$ 与 $F\times F^*$ 分别是 R^{p+q} 中的开、闭集，且

$$G\times G^*\setminus F\times F^*=G\times(G^*\setminus F^*)\cup(G\setminus F)\times G^*\subset$$

$$\subset I\times(G^*\setminus F^*)\cup(G\setminus F)\times I^*\subset\bigcup_i(I\times I_i^*)$$

$$\cup\bigcup_i(I_i\times I^*)$$

以及
$$\sum_i|I\times I_i^*|+\sum_i|I_i\times I^*|=|I|\sum_i|I_i^*|$$

$$+|I^*|\sum_i|I_i|<\varepsilon.$$

可知
$$m(G\times G^*\setminus F\times F^*)<\varepsilon,$$

由于 ε 的任意性，易证 $A\times B$ 是可测集.

其次，$A\times B$ 既是可测的，由定理 1，对于 $x\in R^p$ 有

$$(A\times B)_x=\begin{cases}B, & x\in A\\ \varnothing, & x\overline{\in}A\end{cases}$$

所以
$$m(A\times B)=\int_{R^p}(A\times B)_x dx=\int_A mB dx=mA\cdot mB.$$ 证毕

定义 3（下方图形） 设 $f(x)$ 是 $E\subset R^n$ 上的非负函数，则 R^{n+1} 中的点集

$$\{(x,z)\mid x\in E,0\leqslant z<f(x)\},$$

称为 $f(x)$ 在 E 上的下方图形，记为 $G(E,f)$.

定理 3（非负可测函数积分的几何意义） **设 $f(x)$ 为可测集 $E\subset R^n$ 上的非负函数，则**

(1) $f(x)$ 是 E 上的可测函数充要条件是 $G(E,f)$ 是 R^{n+1} 中的可测集；

(2) 当 $f(x)$ 在 E 上可测时，

$$\int_E f(x)dx=mG(E,f).$$

证 设 $f(x)=c$（常数）$\geqslant 0$，则 $G(E,f)=\begin{cases}E\times[0,c),&c>0,\\ \varnothing,&c=0.\end{cases}$ 所以由定理 2，$G(E,f)$ 是 R^{n+1} 中的可测集.

设 $f(x)$ 为 E 上的简单函数，这时因为对于 $E=\bigcup_k E_k$（各 E_k 可测，互不相交），总有 $G(E,f)=\bigcup_k G(E_k,f)$，故 $G(E,f)$ 可测.

设 $f(x)$ 是非负可测函数，由第四章 § 1，定理 7 总存在一列简单函数：$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots$，使

$$\lim_n\varphi_n(x)=f(x),\ x\in E.$$

不难证明，$G(E,\varphi_1)\subset G(E,\varphi_2)\subset\cdots$，且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,\varphi_n)=G(E,f)①,$$

从上面已知各 $G(E,\varphi_n)$ 都可测，所以 $G(E,f)$ 可测.

---

① 此等式的成立同下方图形中采用了 $0\leqslant z<f(x)$ 不是采用了 $0\leqslant z\leqslant f(x)$ 有关

反之，如果 $G(E,f)$ 是可测的，由定理 1，$mG_x(E,f)$ 是在 R^n 中 a.e. 有定义的可测函数，且

$$mG_x(E,f)=\begin{cases}f(x), & x\in E,\\ 0, & x\overline{\in} E,\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 E 上可测且

$$\int_E f(x)dx=mG(E,f).$$

推论 1 设 $f(x)$ 为 $E\subset R^n$ 上的可积函数，则

$$\int_E f(x)dx=mG(E,f^+)-mG(E,f^-).$$

推论 2 可测函数 $f(x)$ 在 $E\subset R^n$ 上可积分的充要条件是 $mG(E,f^+)$ 与 $mG(E,f^-)$ 都是有限的.

由上面的两个定理立即可以导出 Fubini 定理，它说明了高维积分与低维积分之间的联系，也就是数学分析中重积分化累次积分的推广.

定理 4 (Fubini) (1) 设 $f(P)=f(x,y)$ 在 $A\times B\subset R^{p+q}$(A, B 分别为 R^p 与 R^q 中之可测集) 上非负可测，则对 a.e. 的 $x\in A$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可测，且

$$\int_{A\times B}f(P)dP=\int_A dx\int_B f(x,y)dy \tag{1}$$

(2) 设 $f(P)=f(x,y)$ 在 $A\times B\subset R^{p+q}$ 上可积，则对 a.e. 的 $x\in A$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可积，又 $\int_B f(x,y)dy$ 作为 x 的函数在 A 上可积且(1)式成立.

证 (1) 由定理 3，$G(A\times B,f)$ 是 R^{p+q+1} 中可测集，且

$$mG(A\times B,f)=\int_{A\times B}f(P)dP, \tag{2}$$

但是由定理 1，可得

$$mG(A\times B,f)=\int_{R^p}mG(A\times B,f)_x dx, \tag{3}$$

其中被积函数 a.e. 有意义. 由于

$$R^{q+1}\supset G(A\times B,f)_x=\begin{cases}\{(y,z)\mid y\in B,0\leqslant z<f(x,y)\}, & x\in A,\\ \varnothing, & x\overline{\in}A.\end{cases}$$

所以对于 $x\in A$ 这截面实际上就是将 x 固定后, $f(x,y)$ 看作是 y 的函数时, 在 B 上的下方图形 $G(B,f_{(x固定)})$. 于是当这截面可测时由定理 3 有

$$mG(A\times B,f)_x=mG(B,f_{(x固定)})=\int_B f(x,y)dy \tag{4}$$

从公式(2), (3)和(4)即得公式(1).

(2) 设 $f(P)$在 $A\times B$ 上可积, 则 $f^+(P)$, $f^-(P)$在 $A\times B$ 上也可积, 对它们分别应用式(1), 相减即得

$$\begin{aligned}\int_{A\times B}f(P)dP&=\int_{A\times B}f^-(P)dP-\int_{A\times B}f^-(P)dP\\&=\int_A dx\int_B f^+(x,y)dy-\int_A dx\int_B f^-(x,y)dy\\&=\int_A dx\left(\int_B f^+dy-\int_B f^-dy\right)\\&=\int_A dx\int_B(f^+-f^-)dy\\&=\int_A dx\int_B f(x,y)dy.\end{aligned}$$

(这里 $\int_B f^+dy$, $\int_B f^-dx$ 作为 x 的函数, 显然各在 A 上可积分, 因此有第三等式, 而且知两积分在 A 上 a.e. 有限, 由此又知对 a.e. 的 $x\in A$, f^+, f^-在 B 上可积, 所以有第四等式, 而且知对 a.e. 的 $x\in A$, $f(x,y)$在 B 上可积)

注意, 公式(1)换成

$$\int_{A\times B}f(P)dP=\int_B dy\int_A f(x,y)dx,$$

照样成立, 当然定理中某些字母都要作相应的对调.

读者可以回忆一下，在 R 积分理论中重积分化成累次积分所要求的条件比 L 积分理论中要多，这是 L 积分的另一个成功之处.

从 Fubini 定理，我们看到，只要重积分有限，它就和两个累次积分相等.

例 5 设 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 定义在 $E=(0,1)\times(0,1)$ 上，则可算出

$$\int_{(0,1)}dx\int_{(0,1)}f\,dy=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{(0,1)}dy\int_{(0,1)}f\,dx=\int_0^1\frac{-1}{1+y^2}dy=-\frac{\pi}{4}$$

由 Fubini 定理，肯定 $f(x,y)$ 在 E 上不可积.

§ 7. 有界变差函数

本节主要内容是介绍一类重要函数——有界变差函数. 在历史上它是在考察弧长的存在问题时首先被引入的. 让我们就从这方面谈起. 注意本节讲的实函数都是在 R^1 中的情形.

在数学分析中已知，弧长是作为内接折线长的极限而定义的，正如 R 积分一样，它还有一个等价的"确界式"的定义，对平面曲线来说，那就是

定义 1(弧长) 设 C 是平面上一条连续弧，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，是它的参数表示，这里 $\varphi(t)$，$\psi(x)$ 为 $[\alpha,\ \beta]$ 上的连续函数，相应于区间 $[\alpha,\beta]$ 的任一分划

$$T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$$

得到 C 上一组分点 $P_i=(\varphi(t_i),\psi(t_i))$，$i=0,1,2,\cdots,n$，设依次连结各分点 P_i 所得内接折线的长为 $L(T)$，如果对于 $[\alpha,\ \beta]$ 的一切分划 T，$\{L(T)\}$ 成一有界数集，则称 C 为可求长的，并称其上确界

$$L=\sup_T L(T)$$

为C之长.

现在来研究连续弧可求长的充要条件.

首先

$$L(T)=\sum_{i=1}^{n}\{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2\}^{1/2}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})| \quad 和 \quad \sum_{i=1}^{n}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})| \quad 都$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2\}^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}[|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|],$$

立刻看出$\{L(T)\}$有界的充要条件是$[\alpha,\beta]$的一切分划T都使

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|\right\}及\left\{\sum_{i=1}^{n}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\right\}$$

成为有界数集.

定义 2 设$f(x)$为$[a,b]$上的有界函数,如果对于$[a, b]$的一切分划T,使$\left\{\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\right\}$成一有界数集,则称$f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数(或囿变函数),并称这个上确界为$f(x)$在$[a,b]$上的全变差,记为$\bigvee_a^b(f)$. 用一个分划作成的和数

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

称为$f(x)$在此分划下对应的变差.

因此得到

定理 1　连续弧 $x=\varphi(x), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$，可求长的充要条件是 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是 $[\alpha, \beta]$ 上的有界变差函数.

现在我们集中研究有界变差函数.

首先,不难看出在有限闭区间上满足利普希茨(Lipschitz)条件的函数是有界变差函数；另外在有限闭区间上的单调有限函数也是有界变差函数,因此有界变差函数不一定是连续函数,但是反过来,连续函数也不一定是有界变差函数.例如

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

显然它在 $[0, 1]$ 上是连续函数.

如果对 $[0, 1]$ 取分划

$$T: 0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

则容易证明

$$\sum_{i=1}^{2n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

从而得到

$$\bigvee_0^1(f)=\infty.$$

定理 2　(1) **设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界变差,则也在任一子区间 $[a_1, b_1]$ 上有界变差. 又如 $a<c<b$, $f(x)$ 分别在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上有界变差,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也有界变差且**

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f);\text{(可加性)}$$

(2) **设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界变差,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;**

(3) **设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上都是有界变差, 则 $f(x)\pm g(x)$,**

$f(x)g(x)$在$[a,b]$上有界变差.

证 (1) 对$[a_1,b_1]$任取一分划

$$T: a_1=x_0<x_1<\cdots<x_n=b_1,$$

对应的变差为V,而取$a<a_1<x_1<\cdots<x_{n-1}<b_1<b$为$[a,b]$的一分划$T_1$,其对应变差为$V_1$,显然有

$$V\leqslant V_1\leqslant \bigvee_a^b(f)$$

所以$\bigvee_{a_1}^{b_1}(f)\leqslant \bigvee_a^b(f)$,即$f(x)$在$[a_1,b_1]$上有界变差.

对$[a,b]$作一分划T,其对应变差为V. 再插入一分点c,得又一分划

$$T_0: x_0=a<x_1<\cdots<x_n=b,$$

其中$x_m=c$, $1\leqslant m\leqslant n$,其对应变差为V_0,计算得

$$V\leqslant V_0=\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=m+1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$=V_1+V_2$$

其中V_1, V_2分别为$[a,c]$, $[c,b]$上的变差. 由此得到

$$V\leqslant \bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f),$$

所以$\bigvee_a^b(f)\leqslant \bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$. 这说明$f(x)$在$[a,b]$上为有界变差函数.

其次证明相反的不等式

对$[a,c]$与$[c,b]$分别任取两个分划

T_1: $y_0=a<y_1<\cdots<y_m=c$, T_2: $z_0=c<z_1<\cdots<z_n=b$,

得相应的变差分别为

$$V_1=\sum_{k=1}^{m}|f(y_k)-f(y_{k-1})|,$$

$$V_2=\sum_{k=1}^{n}|f(z_k)-f(z_{k-1})|,$$

将上述二组分点并起来，则得到$[a,b]$的一分划，其对应变差为V，且有

$$V=V_1+V_2,$$

由此得 $V_1+V_2\leqslant\bigvee_a^b(f)$，所以$\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(f)$.

总起来即得

$$\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)=\bigvee_a^b(f).$$

(2) 对于 $a\leqslant x\leqslant b$ 有

$$V=|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant\bigvee_a^b(f)$$

从而

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+\bigvee_a^b(f).$$

(3) 设 $s(x)=f(x)+g(x)$，则

$$|s(x_k)-s(x_{k-1})|\leqslant|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|g(x_k)-g(x_{k-1})|,$$

从而

$$\bigvee_a^b(s)\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g),$$

所以 $s(x)$为有界变差函数.

同理可证 $f(x)-g(x)$是有界变差函数.

其次，设 $p(x)=f(x)\cdot g(x)$，令 $A=\sup|f(x)|<\infty$，$B=\sup|g(x)|<\infty$，则

$$
\begin{aligned}
|p(x_k)-p(x_{k-1})| &\leqslant |f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_k)| \\
&\quad + |f(x_{k-1})g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\
&\leqslant B|f(x_k)-f(x_{k-1})|+A|g(x_k)-g(x_{k-1})|,
\end{aligned}
$$

从而

$$\bigvee_a^b(p)\leqslant B\bigvee_a^b(f)+A\bigvee_a^b(g)$$

故 $f(x)g(x)$ 为有界变差函数. 证毕.

前面提到 $[a,b]$ 上的有限增函数是有界变差函数，由定理 2 知，两个有限增函数的差还是有界变差函数. 反之，我们有下面重要结论.

定理 3（Jordan 分解） **在 $[a,b]$ 上的任一有界变差函数 $f(x)$ 都可表示为两个增函数之差.**

证 由定理 2 知 $g(x)=\bigvee_a^x(f)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数。

令

$$h(x)=g(x)-f(x) \tag{1}$$

不难证明 $h(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数.

事实上，对于 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 有

$$
\begin{aligned}
h(x_2)-h(x_1) &= g(x_2)-g(x_1)-[f(x_2)-f(x_1)] \\
&= \bigvee_{x_1}^{x_2}(f)-[f(x_2)-f(x_1)] \\
&\geqslant |f(x_2)-f(x_1)|-[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)=g(x)-h(x)$，其中 $g(x)$ 与 $h(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的有限增函数. 证毕.

因为单调函数至多有可数个不连续点，由定理 3 便知有界变

差函数至多有可数个不连续点.

Weierstrass 曾经举过到处连续而无处可导的函数的例子，但是有界变差函数却有下面十分深刻的性质.

定理 4①(Lebesgue)　**设$f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，则**

(1) **$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在导数$f'(x)$;**

(2) **$f'(x)$在$[a,b]$上可积.**

(3) **如果$f(x)$为增函数，有$\int_a^b f'(x)dx \leqslant f(b)-f(a)$.**

为证此定理先讲两个引理.

定义 3　设$E\subset R^1$, $V=\{I\}$是长度为正的区间族，如果对于任何的$x\in E$及任何$\varepsilon>0$，存在区间$I_x\in E$，使$x\in I_x$且$mI_x<\varepsilon$，则称V依维他利(Vitali)意义覆盖E，简称E的V-覆盖.

易证其定义的等价形式为：对于任何的$x\in E$，存在一列区间$\{I_n\}\subset V$，使$x\in I_n$, $n=1,2,\cdots$，且$mI_n\to 0\quad(n\to\infty)$.

引理 1(Vitali 覆盖定理)　**设$E\subset R^1$且$m^*E<\infty$，$\mathscr{V}$是E的V-覆盖，则可选出区间列$\{I_n\}\subset\mathscr{V}$，使各$I_n$互不相交且**

$$m(E\setminus\bigcup_k I_k)=0. \tag{1}$$

证　不妨设$\mathscr{V}$是由闭区间组成的，这是因为

$$m^*(E\setminus\bigcup_k I_k)=m^*(E\setminus\bigcup_k \bar{I}_k).$$

其次不妨再设$\mathscr{V}$中各区间都含在一个测度有限的开集U内.

任取$I_1\in\mathscr{V}$，如果满足(1)式，则引理得证. 否则令

$$r_1=\sup\{mI \mid I\cap I_1=\varnothing, I\in\mathscr{V}\}，显然$$

$$r_1\leqslant mU<\infty，且\ r_1>0,$$

其中U为上述开集，所以存在I_2使$mI_2>\frac{1}{2}r_1$且$I_1\cap I_2=\varnothing$. 如

① 此定理若课时不够可不证.

果$\{I_1, I_2\}$满足(1)式，则引理得证．否则，再作下去，一般地，如果$I_1, I_2, \cdots, I_n$已由$\mathscr{V}$中取出而不满足(1)式，则

令 $$r_n=\sup\{mI \mid I\cap I_j=\varnothing,\ j=1,2,\cdots,n,\ 且\ I\in\mathscr{V}\},$$

同样$0<r_n<\infty$，再取I_{n+1}使$mI_{n+1}>\frac{1}{2}r_n$且$I_{n+1}\cap I_j=\varnothing$，$j=1,2,\cdots,n$．如此继续下去，如在某一步取出之区间能满足(1)式，则停止，此时引理即得证．否则便得一列区间$\{I_j\}$。

下面我们证明这一列区间$\{I_j\}$满足(1)式．

因为$\{I_j\}$中各I_j不相交且$\{I_j\}\subset U$，所以有$\sum\limits_{j=1}^{\infty}mI_j<\infty$．故对任何$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使$\sum\limits_{j=N+1}^{\infty}mI_j<\varepsilon/5$．

若$E\setminus\bigcup\limits_j I_j=\varnothing$，则(1)式成立,如果非空，则任取$y\in E\setminus\bigcup\limits_j I_j$，存在$I_y\in\mathscr{V}$，使$y\in I_y$且$I_y\cap I_j=\varnothing$，$j=1,2,\cdots,N$．易证存在$n>N$使$I_y\cap I_n\neq\varnothing$．事实上，如果对任何$n>N$，总有$I_y\cap I_n=\varnothing$，则由$r_n$的定义与$\{I_j\}$之构造有

$$mI_y\leqslant r_n\leqslant 2mI_{n+1},\ 但\sum_j mI_j<\infty,\ 所以\ mI_j\to 0.$$

从而$mI_y=0$，这与$mI_y>0$的假设矛盾．

设$n=n(y)$是使$I_y\cap I_n\neq\varnothing$的最小下标．令$x_n$为$I_n$之中点(图5.2)，易证

$$|y-x_n|<\frac{5}{2}mI_n \tag{2}$$

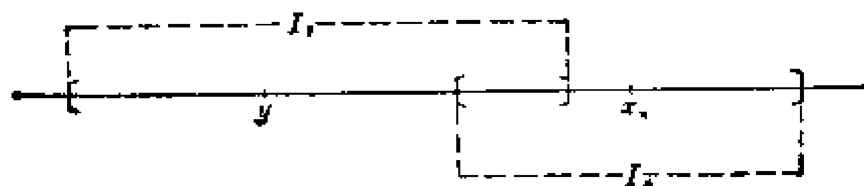


图 5.2

事实上，由上图得$|y-x_n|\leqslant mI_y+\frac{1}{2}mI_n$，又由$mI_y\leqslant r_{n-1}\leqslant 2mI_n$，即得证

对每个$i>N$，设J_i是以x_i为中心，$mJ_i=5mI_i$的闭区间. 由于$n=n(y)>N$，由(2)式，得$y\in I_n\subset\bigcup\limits_{N+1}^{\infty}J_i$，所以

$$E\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}J_i\subset\bigcup_{i=N+1}^{\infty}J_i,$$

但是

$$m(\bigcup_{i=N+1}^{\infty}J_i)\leqslant\sum_{i=N+1}^{\infty}mJ_i=5\sum_{i=N+1}^{\infty}mI_i<\varepsilon,$$

故

$$m(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i)=0.$$

证毕.

Vitali 覆盖定理也可表示成另一种形式.

推论 设$E\subset R^1$且$m^*E<\infty$，$\mathscr{V}$是E的V-覆盖，则对任何$\varepsilon>0$，可从$\mathscr{V}$中选出互不相交的有限个区间$I_1, I_2, \cdots, I_n$使

$$m^*(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i)<\varepsilon.$$

证 取$n=n(\varepsilon)$，使$\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}mI_i<\varepsilon$，则

$$m^*(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}I_i)\leqslant m^*(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i)+m(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}I_i)<\varepsilon.$$

证毕.

定义 4 设$f(x)$为$[a, b]$上的有限函数，$x_0\in[a, b]$，如果存在数列$h_n\to 0(h_n\neq 0)$使极限

$$\lim_{n}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda$$

存在(λ 可为 $\pm\infty$)，则称 λ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的一个列导数，记为 $Df(x_0)=\lambda$.

注意：列导数 $Df(x_0)$ 与数列 $\{h_n\}$ 的取法有关．例如 $f(x)$ 取作狄里克雷函数，设 x_0 为有理数，则

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\begin{cases}0, & h_n \text{ 为有理数,}\\ -\dfrac{1}{h_n}, & h_n \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

故得
$$Df(x_0)=\begin{cases}0,\\ +\infty,\\ -\infty.\end{cases}$$

易证，$f(x)$ 在点 x_0 存在导数 $f'(x_0)$ 的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的一切列导数都相等．请读者自证．

引理 2 **设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的严格增函数，**

(1) 如果对于 $E\subset[a,b]$ 中每一点 x，至少有一个列导数 $Df(x)\leqslant p(p\geqslant0)$，则 $m^*f(E)\leqslant pm^*E$；

(2) 如果对于 $E\subset[a,b]$ 中每一点 x，至少有一个列导数 $Df(x)\geqslant q(q\geqslant0)$，则 $m^*f(E)\geqslant qm^*E$.

证 任取 $\varepsilon>0$，取开集 $G\supset E$ 且 $mG<m^*E+\varepsilon$ (1)

取 $p_0>p$，设 $x_0\in E$，存在 $h_n\to0$，使

$$\lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0)<p_0.$$

不妨设 $h_n(n=1,2,\cdots)$ 同号(否则取其子列使之同号)．

设
$$I_n(x_0)=\begin{cases}[x_0,x_0+h_n], & \text{当 } h_n>0,\\ [x_0+h_n,x_0], & \text{当 } h_n<0,\end{cases}$$

$$\Delta_n(x_0)=\begin{cases}[f(x_0),f(x_0+h_n)], \text{当 } h_n>0,\\ [f(x_0+h_n),f(x_0)], \text{当 } h_n<0.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 严格增加，所以 $f[I_n(x_0)]\subset\Delta_n(x_0)$ (2)

因为 $mI_n(x_0)\to0$，G 是开集，所以当 n 充分大时，

$$I_n(x_0)\subset G,\ 且\quad \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<p_0 \tag{3}$$

不妨假设对一切 n(3)式成立，(否则从$\{h_n\}$中去掉有限项，即可满足这一要求)于是

$$m\Delta_n(x_0)<p_0 mI_n(x_0), \tag{4}$$

可见 $m\Delta_n(x_0)\to 0$，再由(2)式，故

$$\{\Delta_n(x)\,|\,x\in E,\ n=1,2,\cdots\}$$

为 $f(E)$ 的一个 $\mathscr{V}$-覆盖. 由引理 1, 可取出互不相交区间列 $\{\Delta_{n_j}(x_j)\}$ 使

$$m[f(E)\setminus\bigcup_j \Delta_{n_j}(x_j)]=0.$$

易证各 $I_{n_j}(x_j)$也互不相交，从而有

$$m^*f(E)\leqslant\sum_j m\Delta_{n_j}(x_j)<p_0\sum_j I_{n_j}(x_j)=p_0 m(\bigcup_j I_{n_j}(x_j)).$$

由(3)式 $\bigcup_j I_{n_j}(x_j)\subset G$，再由(1)式得

$$m^*f(E)<p_0 mG<p_0(m^*E+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to 0$, $p_0\to p$，即得引理 2 的(1).

注意，这里强调严格增加为了保证 $\Delta_n(x)$不是退化为一点的区间. 其次 $f(x)$不限于在整个$[a,b]$上有定义也可只在其子集上有意义.

(2) 因为 $y=f(x)$在$[a,b]$上严格增加，所以在 $f([a,b])$上有严格增的反函数 $x=f^{-1}(y)$.

设 $q>0$，(因 $q=0$，显然成立)，且E中 $f(x)$的不连续点集为N(至多可数个). 任取 $x_0\in E\setminus N$, $y_0=f(x_0)$，则由假设存在$Df(x_0)\geqslant q$，即存在数列 $h_n\to 0\quad(h_n\neq 0)$使

$$\lim_n\frac{f^{-1}(y_0+k_n)-f^{-1}(y_0)}{k_n}=\lim_n\frac{(x_0+h_n)-x_0}{f(x_0+h_n)-f(x_0)}$$

$$=\frac{1}{Df(x_0)}\leqslant\frac{1}{q},$$

其中 $k_n=f(x_0+h_n)-f(x_0)\to 0\quad(n\to\infty)$.

即对任何 $y_0\in f(E\setminus N)$有

$$Df^{-1}(y_0)\leqslant\frac{1}{q},$$

由(1)得 $$m^*f^{-1}[f(E\setminus N)]\leqslant\frac{1}{q}m^*f(E\setminus N).$$

即 $$qm^*(E\setminus N)\leqslant m^*f(E\setminus N).$$

但是

$$qm^*N=m^*f(N)=0,$$

故得 $$qm^*E\leqslant m^*f(E).$$ 证毕.

定理 4 之证明

由定理 3，不妨设 $f(x)$为增加函数.

设 $g(x)=f(x)+x$, 显然 $g(x)$在$[a,b]$上为严格增函数，且 $g(x)$与 $f(x)$有相同的可导性.

设 $$E=\{x\,|\,g'(x)\text{不存在}\},$$

于是对任何点 $x_0\in E$, 总有两个列导数$D_1g(x_0)$与$D_2g(x_0)$使$D_1g(x_0)\neq D_2g(x_0)$, 不妨设 $D_1g(x_0)<D_2g(x_0)$，这时必有两非负有理数 p, q 使

$$D_1g(x_0)<p<q<D_2g(x_0),$$

令集合 $$E_{pq}=\{x_0\,|\,D_1g(x_0)<p<q<D_2g(x_0)\},$$

易知

$$E=\bigcup_{p,q}E_{pq}.$$

由引理 2 知

$$qm^*E_{pq}\leqslant m^*g(E_{pq})\leqslant pm^*E_{pq},$$

因为 $q>p$, 所以 $m^*E_{pq}=0$，故 $mE=0$，所以 $f(x)$在$[a,b]$ 上 a.

c. 有导数(包括无限导数在内).

设 $$g_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)],$$

此外当 $x\geqslant b$ 时令 $f(x)=f(b)$, 由上面知, $g_n(x)\to f'(x)$ a.e. 于 $[a,b]$, 由于 $f(x)$ 可测, 所以 $g_n(x)$, $f'(x)$ 及 $|f'(x)|$ 都可测. 由 Fatou 定理和 $f(x)$ 的单调性, 便得

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b |g_n(x)|\,dx=\varliminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}[n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-n\int_a^b f(x)dx]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}[n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx]$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}[f(b)-f(a)]=f(b)-f(a).$$

(这里在导数不存在的点上令 $f'(x)=0$), 所以 $f'(x)$ 可积且 $f'(x)<\infty$, a.e. 于 $[a,b]$, 而且

$$\int_a^b f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a).$$ 证毕.

值得注意的是, 对某些函数, 确实成立不等式.

例如, 设 P_0 是 Cantor 集, 将它的余区间作如下的分类: 第一类是一个区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 第二类是两个区间 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, 第三类是四个区间 $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$, 依此类推, 在第 n 类中有 2^{n-1} 个区间.

今作函数 $\theta(x)$ 如下:

当 $x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 时, $\theta(x)=\frac{1}{2}$; 当 $x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 时, $\theta(x)=\frac{1}{4}$; 当 $x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ 时, $\theta(x)=\frac{3}{4}$. 在第三类的四个区间中 $\theta(x)$ 依次取 $\frac{1}{8}$,

$\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$，一般的说，在第 n 类的 2^{n-1} 个区间中 $\theta(x)$ 依次取值

$$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}.$$

于是 $\theta(x)$ 在 P_0 的余集 G_0 上有定义，它在 G_0 的每一个构成区间上是常数，但总的说来在 G_0 上是一增函数，在 P_0 上 $\theta(x)$ 定义如下：

$$\theta(0)=0, \quad \theta(1)=1.$$

对于介于 0 与 1 之间的 P_0 中的点 x_0，则令

$$\theta(x_0)=\sup_{\substack{x \in G_0 \\ x<x_0}}\{\theta(x)\}.$$

这样，$\theta(x)$ 是在 $[0, 1]$ 上定义的一个增函数.

我们还可以证明，$\theta(x)$ 是一个连续函数. 事实上，因为 $\theta(x)$ 在 G_0 上所取函数值已在 $[0, 1]$ 中处处稠密. 如果增函数 $\theta(x)$ 在 x_0 有一不连续点，则 $(\theta(x_0-0), \theta(x_0))$ 或 $(\theta(x_0), \theta(x_0+0))$ 的一切数就不是 $\theta(x_0)$ 的函数值，这是与稠密性相矛盾的，所以 $\theta(x)$ 是一连续增函数，并且 $\theta'(x)$ a.e. 为 0（在 G_0 中每点当然 $\theta'(x)=0$）. 因此

$$0=\int_0^1 \theta'(x)dx<1=\theta(1)-\theta(0)$$

下节我们还要建立等号成立的条件.

§8. 不定积分

本节的最终目标在于揭示积分与导数之间的关系. 正如在 R 积分中我们不能只考虑具有固定上限的定积分而必须进而考虑有变上限的不定积分，我们很自然地要引入下面的概念.

定义 1（不定积分） 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积，则 $[a, b]$ 上的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$（C 为任一常数）称为 $f(x)$ 的一个不定

积分.

我们的任务是找出一切有资格做某一可积函数的不定积分的函数的特征.

我们任取 $f(x)$在$[a,b]$上的一个不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C.$$

则由于$|f(x)|$的积分的绝对连续性,对任何 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使$A\subset[a,b]$, $mA<\delta$ 时, $\int_A|f(x)|dx<\varepsilon$.

特别取A等于互不相交的有限多个开区间的和集 $A=\bigcup_1^n(a_i, b_i)$, 显然当$\sum_1^n(b_i-a_i)<\delta$时, 有

$$\sum_{i=1}^n|F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{a_i}^{b_i}f(x)dx\right|\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}|f(x)|dx=\int_A|f(x)|dx<\varepsilon.$$

定义 2 (绝对连续函数) 设 $F(x)$为$[a,b]$上的有限函数, 如果对任何 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使对$[a,b]$中互不相交的任意有限个开区间(a_i,b_i), $i=1,2,\cdots,n$, 只要$\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$就有$\sum_{i=1}^n|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon$, 则称 $F(x)$为$[a,b]$上的绝对连续函数.

由此便得

定理 1 **设 $f(x)$在$[a,b]$上可积, 则其不定积分为绝对连续函数.**

不难证明绝对连续函数是一致连续函数, 并且也是囿变函数.

满足 Lipschitz 条件的函数是绝对连续函数.

定理 2 **设 $F(x)$ 为 $[a,b]$上的绝对连续函数, 且 $F'(x)=0$ a.e. 于$[a,b]$, 则 $F(x)=\text{const}$.**

证 设 $c\in[a,b]$, 我们将证明 $F(c)=F(a)$.

由假设, 存在 $A\subset(a,c)$, 使 $mA=c-a$, 且当 $x\in A$ 时, $F'(x)=0$. 令 $B=(a,c)\setminus A$, $mB=0$. 对于任取 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

任取 $x\in A$, 由于 $F'(x)=0$, 按定义知存在 $[x,y]\subset(a,c)$ 使

$$|F(y)-F(x)|<\frac{\varepsilon(y-x)}{2(c-a)}. \qquad (1)$$

取 $\mu=\{[x,y]\mid x\in A, [x,y]\subset(a,c)$ 且(1)式成立$\}$, 显然它是 A 的 V-覆盖. 由 Vitali 覆盖定理, 总有

$$\{[x_j,y_j]\mid j=1,2\cdots n, \text{ 且 } x_j\in A\}$$

使

$$|F(y_j)-F(x_i)|\leqslant\varepsilon(y_i-x_i)/2(c-a), \qquad (2)$$

且
$$m(A\setminus\bigcup_{1}^{n}[x_j,y_j])<\delta.$$

不失一般性, 不妨设 $x_{j-1}<x_j$, 我们总有

$$\bigcup_{j=0}^{n}([y_j,x_{j+1}]\setminus B)\subset A\setminus\bigcup_{j=1}^{n}[x_j,y_j],$$

由此得

$$\sum_{j=0}^{n}|x_{j+1}-y_j|<\delta, \text{ 这里 } x_{n+1}=c,\ y_0=a.$$

由 $F(x)$的绝对连续性, 又得

$$\sum_{j=0}^{n}|F(x_{j+1})-F(y_j)|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

由(2)式得

$$\sum_{j=1}^{n}|F(y_j)-F(x_j)|<\frac{\varepsilon}{2(c-a)}\sum_{j=1}^{n}|y_j-x_j|. \tag{4}$$

再由(3)式和(4)式，得

$$|F(c)-F(a)|\leqslant\sum_{j=0}^{n}|F(x_{j+1})-F(y_j)|$$

$$+\sum_{j=1}^{n}|F(y_j)-F(x_j)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $$F(c)=F(a).$$ 证毕.

定理 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则存在绝对连续函数 $F(x)$ 使 $F'(x)=f(x)$ a.e. 于 $[a,b]$ (只需取 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$).

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以有连续函数 $\varphi(x)$ 使

$$\int_a^b|f(t)-\varphi(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2},\text{而}\frac{d}{dx}\int_a^x\varphi(t)dt=\varphi(x),$$

因此 $$\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt-f(x)\right|dx$$

$$=\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)-\varphi(t)dt+\varphi(x)-f(x)\right|dx$$

$$\leqslant\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x(f(t)-\varphi(t))dt\right|dx+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

令 $g(t)=f(t)-\varphi(t)$，显然 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积分，因为 $g(x)=g^+(x)-g^-(x)$，$\int_a^x g^+(t)dt$，$\int_a^x g^-(t)dt$ 为两个增函数，所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt=\frac{d}{dx}\int_a^x g^+(t)dt-\frac{d}{dx}\int_a^x g^{-1}(t)dt \quad \text{a.e. 于}[a,b].$$

由前节定理 4 的(3)得

$$\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt\right|dx\leqslant\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\int_a^x g^+(t)dt\right)dx$$

$$+\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\int_a^x g^-(t)dt\right)dx$$

$$\leqslant\int_a^b g^+(x)dx+\int_a^b g^-(x)dx=\int_a^b|g(x)|dx.$$

所以 $\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt-f(x)\right|dx\leqslant 2\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon.$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，得左边积分为0，从而被积函数几乎处处为0，故得证.

该定理说明一重要事实，即在 L 积分范围内积分再微分则还原.

绝对连续函数之所以重要在于它完全可以标志不定积分，换言之，除定理 1 外，还有

定理 4　设 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则几乎处处有定义的 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt,$$

即 $F(x)$ 总是 $[a,b]$ 上可积函数的不定积分。

证　设 $G(x)=\int_a^x F'(t)dt$，令 $H(x)=F(x)-G(x)$①

则由定理 3 得

$H'(x)=F'(x)-G'(x)=0$,　a.e. 于 $[a,b]$，所以再由定理 2，便得 $H(x)=C$，即

$$F(x)=\int_a^x F'(t)dt+C,$$

这里 $C=F(a)$. 证毕.

由此我们得到：$F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的充要条件，它是一个可积函数的不定积分.

定理 4 是 R 积分理论中 N-L 公式的推广，对绝对连续函数而

① 两个绝对连续函数经四则运算后仍为绝对连续函数.

言，微分再积分也还原(至多差一常数)．但是象前节末所看到的那样，对有界变差函数一般却不能保证定理 4 成立．因此，L 积分在积分与微分的关系问题上虽比 R 积分优越得多，但还不够理想。至于进一步的扩充需要 Denjoy 积分才能完全解决这一问题．

最后介绍一下 L 积分的分部积分法．

定理 5 (分部积分法)　设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续，$\lambda(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且 $g(x)-g(a)=\int_a^x \lambda(t)dt$，则

$$\int_a^b f(x)\lambda(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

证　设 D 表区域：$a\leqslant y\leqslant x\leqslant b$．$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，所以 $f'(x)$ 可积，于是，令

$$F(x,y)=\begin{cases}\lambda(x)f'(y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\overline{\in} D.\end{cases}$$

是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的可积函数，由 Fubini 定理

$$\int_{[a,b]\times[a,b]}F(P)dP=\int_a^b dx\int_a^x\lambda(x)f'(y)dy$$

$$=\int_a^b dy\int_y^b\lambda(x)f'(y)dx.$$

但是

$$\int_a^b dx\int_a^x\lambda(x)f'(y)dy=\int_a^b\lambda(x)[f(x)-f(a)]dx$$

$$=\int_a^b\lambda(x)f(x)dx-f(a)[g(b)-g(a)],$$

$$\int_a^b dy\int_y^b\lambda(x)f'(y)dx=\int_a^b f'(y)[g(b)-g(y)]dy$$

$$=-\int_a^b f'(y)g(y)dy+g(b)[f(b)-f(a)].$$

所以由以上两式便得

$$\int_a^b\lambda(x)f(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\lambda(x)dx.$$　证毕．

§9. 斯蒂阶（Stieltjes）积分

现在我们着手推广 L 积分，得到所谓 L-S 积分，并为此在本节先介绍一下作为 L-S 积分的前身的 Riemann-Stieltjes 积分（简称 R-S 积分或 S 积分），当然 R-S 积分是 R 积分的另一种推广.

考虑分布有质量的线段 $[a, b]$，设分布在线段 $[a, x]$ 上的总质量 $m(x)$ 是已知的递增函数，从而分布在线段 $[x, x']$ 上的质量为 $m(x')-m(x)$，则这线段 $[a, b]$ 关于原点 O 的力矩和转动惯量分别定义为

$$M=\lim_{\delta(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i(m(x_i)-m(x_{i-1})),\quad \text{记为}\int_a^b x\,dm(x),$$

$$J=\lim_{\delta(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(m(x_i)-m(x_{i-1})),\quad \text{记为}\int_a^b x^2dm(x).$$

这里分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $\delta(T)=\max\limits_i(x_i-x_{i-1})$.

由于物理上诸如此类问题的需要，值得将此概念一般化，便得到如下

定义（S 积分） 设 $f(x)$, $\alpha(x)$ 为 $[a, b]$ 上的有限函数，对 $[a, b]$ 作一分划

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

及属于此分划的任一组"介点" $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 作和数（叫做 Stieltjes 和数）

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})].$$

如果当 $\delta(T)\to 0$ 时，这和数总趋于一确定的有限极限（不论 T 如何取法，也不论介点取法如何），则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 $\alpha(x)$ 为 S 可积分的，此极限叫做 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 $\alpha(x)$ 的 S 积分，记为

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)①.$$

易知当 $\alpha(x)=x$ 时，S 积分便成为 R 积分，可见 S 积分是 R 积分的一种推广.

又如当我们考虑曲线积分 $\int_C f(x, y)dx$，C: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 则

$$\int_C f(x,y)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))d\varphi(t)$$

就是一种特殊的 S 积分.

定理 1

(1) $$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]d\alpha(x)=\int_a^b f_1(x)d\alpha(x)+\int_a^b f_2(x)d\alpha(x);$$

(2) $$\int_a^b f(x)d(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))=\int_a^b f(x)d\alpha_1(x)+\int_a^b f(x)d\alpha_2(x);$$

(3) 设 k, l 为常数，则

$$\int_a^b kf(x)d(l\alpha(x))=k\cdot l\int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

以上三式之意义，是当右边积分有意义时左边积分也有意义，而且等式成立.

(4) 设 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^c f(x)d\alpha(x)+\int_c^b f(x)d\alpha(x).$$

设左、右边各积分都存在.

以上各条之证明直接从定义即得.

---

① 对 S 积分，极限式和确界式定义不等价.

但是第(4)条只假定等式右边两个积分存在，一般的推不出左边积分也存在(见例1)。

下面介绍一个在应用上重要的S积分存在的充分条件.

定理2 **设**$f(x)$**在**$[a, b]$**上连续，**$\alpha(x)$**在**$[a, b]$**上囿变，则** $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$**存在.**

证 由 Jordon 分解定理，$\alpha(x)$可以分解为两个增函数之差，因此不妨设$\alpha(x)$为增函数.

任取$[a, b]$一分划T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，作和数

$$S(T,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})),$$

$$s(T,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})),$$

这里M_i, m_i分别为$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的上，下确界. 则

$$s(T,f,\alpha)\leqslant\sigma\leqslant S(T,f,\alpha).$$

其中σ为S和数.

类似于R积分中的大和与小和，可以证得对任何两分划T_1，T_2，总有

$$s(T_1,f,\alpha)\leqslant S(T_2,f,\alpha).$$

设$I=\sup\limits_T\{s(T,f,\alpha)\}$，则$s\leqslant I\leqslant S$. 因此

$$|\sigma-I|\leqslant S-s.$$

因为$f(x)$在$[a, b]$上连续，对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，

$$\text{当}|x''-x'|<\delta\text{时，有}|f(x'')-f(x')|<\varepsilon,$$

所以当$\delta(T)<\delta$时，　$|M_i-m_i|<\varepsilon$，于是

$$S-s<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)],$$

故当$\delta(T)<\delta$时　$|\sigma-I|<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]$，

即
$$\lim_{\delta(T)\to 0}\sigma=I.$$
证毕.

例1 设 $f(x)$ 和 $\alpha(x)$ 为在 $[-1,1]$ 上定义的两个函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ 1, & (0<x\leqslant 1).\end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, & (-1\leqslant x<0),\\ 1, & (0\leqslant x\leqslant 1).\end{cases}$$

易知, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上关于 $\alpha(x)$ 的 S 积分是不存在的.

事实上, 对 $[-1,1]$ 作一分划

$$T: -1=x_0<\cdots<x_{i-1}<0<x_i<\cdots<x_n=1,$$

则

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]=f(\xi_i)=\begin{cases}0, \xi_i\leqslant 0,\\ 1, \xi_i>0.\end{cases}$$

可见 σ 的极限是不存在的, 即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上关于 $\alpha(x)$ 的 S 积分不存在. 但是, 易见 $f(x)$ 分别在 $[-1,0]$ 与 $[0,1]$ 上的 S 积分都存在.

有时也可将 S 积分化为 R 积分.

定理3 **设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\alpha(x)$ 处处可导且 $\alpha'(x)$ 又 R 可积, 则**

$$(S)\int_a^b f(x)d\alpha(x)=(R)\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \qquad (1)$$

证 因为 $\alpha'(x)$ 有界, 由中值定理, $\alpha(x_2)-\alpha(x_1)=\alpha'(z)(x_2-x_1)$, 所以 $|\alpha(x_2)-\alpha(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$, 这里 M 为常数, $\alpha(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 故 $\alpha(x)$ 为囿变函数. 另一方面, 由假设 $f(x)$, $\alpha'(x)$ 在 $[a,b]$ 上均 R 可积分, 故知(1)式右端积分存在, 剩下只证明(1)式成立.

任取 $[a,b]$ 的一分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 由中值定理便得:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\alpha'(\xi_i')(x_i-x_{i-1}),$$

这里 $x_{i-1}\leqslant\xi_i'\leqslant x_i$。利用 $f(x)$的一致连续性，两边取极限 ($\delta(T)\to 0$)即得证. 证毕.

定理 4 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$为绝对连续，则

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(L)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

证 上面两积分存在是明显的，今证明两积分相等。

对$[a,b]$取一分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，作和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})].$$

考察 σ 与积分

$$(L)\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

之差. 因为

$$g(x_i)-g(x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x)dx.$$

所以

$$\sigma-\int_a^b f(x)g'(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(\xi_i)-f(x)]g'(x)dx.$$

设 $f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅为 ω_i，则由上式得

$$\left|\sigma-\int_a^b f(x)g'(x)dx\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g'(x)|dx$$

$$\leqslant\alpha\int_a^b|g'(x)|dx,$$

这里 $\alpha=\max\{\omega_i\}$. 当 $\delta(T)\to 0$ 时，$\sigma\to\int_a^b f(x)g'(x)dx$. 证毕.

下面提一下 S 积分的分部积分法.

定理 5 设$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$与$\int_a^b \alpha(x)df(x)$中有一个存在，则另一个也存在且

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)+\int_a^b \alpha(x)df(x)=f(x)\alpha(x)\Big|_a^b$$

证 设$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$存在.

对$[a,b]$取一分划T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 不难看出

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\{-\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)[\alpha(\xi_{i+1})$$

$$-\alpha(\xi_i)]-f(x_0)[\alpha(\xi_1)-\alpha(x_0)]-f(x_n)[\alpha(x_n)$$

$$-\alpha(\xi_n)]\}+f(x_n)\alpha(x_n)-f(x_0)\alpha(x_0),$$

而右边$\{\cdots\}$内正好是以$\{\xi_i\}$为分点，$\{x_i\}$为介点的$f(x)$关于$\alpha(x)$的S和数，当$\delta(T)\to 0$时，上式两边取极限即得. 证毕.

推论 设$f(x)$在$[a,b]$上囿变，$\alpha(x)$连续，则积分

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

存在.

上面介绍的S积分是只就R^1讲的，但在$R^n(n>1)$中也可定义S积分，此处不再叙述了。

§10. 勒贝格-斯蒂阶测度与积分

本节目的是介绍L测度、L积分的推广，所谓L-S测度，以及建立在它上面的L-S积分. 这部分只作简单介绍不加详细论述.

设$\alpha(x)$为定义在R^1上的有限增函数，对任何开区间$I=(x,x')$，称$\alpha(x')-\alpha(x)$为区间I的"权"，记为$|I|=\alpha(x')-\alpha(x)$.

定义 1 (L-S外测度) 对任一点集$E\subset R^1$，非负实数

$$\inf_{E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{1}^{\infty} |I_i|$$

称为E关于分布函数$\alpha(x)$的L-S外测度，记为$m_\alpha^* E$.

显然，当$\alpha(x)=x$时，L-S外测度便成为L外测度。

L-S外测度与L外测度有同样的基本性质：

(1) $m_\alpha^* E \geqslant 0$，且$m_\alpha^* \varnothing = 0$.

(2) 设$A \subset B$，则$m_\alpha^* A \subseteq m_\alpha^* B$（单调性）.

(3) $m_\alpha^*\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum\limits_{1}^{\infty} m_\alpha^* E_i$（次可数可加性）.

但在L测度中，区间$\langle a, b\rangle$不论开，闭或半开半闭都是$m^*\langle a, b\rangle = b-a$，而在一般$L$-$S$外测度中则不然.

定理 1

(1) $m_\alpha^*(a, b) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0)$;

(2) $m_\alpha^*(a, b] = \alpha(b+0) - \alpha(a+0)$;

(3) $m^*[a, b] = \alpha(b+0) - \alpha(a-0)$;

(4) $m^*[a, b) = \alpha(b-0) - \alpha(a-0)$.

证 只证开区间情形.

先证 $\quad m_\alpha^*(a, b) \geqslant \alpha(b-0) - \alpha(a+0)$.

为此任取$a < x_1 < x_2 < b$，并设$\bigcup\limits_{1}^{\infty} I_i \supset (a, b)$，当然$\bigcup\limits_{1}^{\infty} I_i \supset [x_1, x_2]$，由 H-B 有限覆盖定理，存在有限个$I_i$，不妨设为$I_1$、$I_2$，$\cdots I_n$，使得$\bigcup\limits_{1}^{n} I_i \supset [x_1, x_2]$，由$\alpha(x)$的单调性易知

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| \geqslant \alpha(x_2) - \alpha(x_1),$$

从而$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i| \geqslant \alpha(x_2) - \alpha(x_1)$. 令$x_1 \downarrow a$，$x_2 \uparrow b$即得.

次证 $m^*(a,b)\leqslant\alpha(b-0)-\alpha(a+0)$,

为此在(a,b)内取$\alpha(x)$的一列连续点(因$\alpha(x)$单调)$\{x_n\}$, $n=0,\pm1,\cdots$, 使$x_n\to a\quad(n\to-\infty)$, $x_n\to b\quad(n\to+\infty)$. 然后对每个$n$取$a_n,b_n$, 使$a<a_n<x_n<b_n<b$及

$$\alpha(b_n)-\alpha(a_n)<\frac{\varepsilon}{2^{|n|+1}},$$

并作开区间$I_n=(a_n,b_{n+1})$, $n=0,\pm1,\cdots$, 显然

$$\bigcup_n I_n\supset(a,\ b)\ \text{且}\sum_n|I_n|=\sum_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(b_{n+1})-\alpha(b_n)]$$

$$+\sum_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(b_n)-\alpha(a_n)]\leqslant\alpha(b-0)-\alpha(a+0)+2\varepsilon.$$

故 $$m_\alpha^*(a,b)\leqslant\alpha(b-0)-\alpha(a+0)+2\varepsilon,$$

即得证. 证毕.

由定理看出, 对$\alpha(x)$取常值的任一开区间I总有$m_\alpha^*I=0$, 而对于$\alpha(x)$的任一不连续点x_0, 则有

$$m_\alpha^*\{x_0\}=\alpha(x_0+0)-\alpha(x_0-0)>0.$$

这恰好与L外测度情形相反.

值得注意的是: 如果改变$\alpha(x)$在不连续点的函数值, 并不影响L-S外测度的值(证法与定理1类似), 因此, 有时可将$\alpha(x)$规范化, 即要求$\alpha(x)$为右连续的增函数, 从而有

$$m_\alpha^*(a,b]=\alpha(b)-\alpha(a).$$

有了L-S外测度, 我们便可仿第三章由L外测度定义L可测集及测度的方法(卡氏条件), 进而定义R^1中关于$\alpha(x)$的L-S可测集与测度.

定义 2(L-S可测集及测度) 设$E\subset R^1$, 满足以下条件: 对任何$T\subset R^1$, 总有

$$m_\alpha^*T=m_\alpha^*(T\cap E)+m_\alpha^*(T\cap CE),$$

则称 E 为关于 $\alpha(x)$ 的 L-S 可测集，而 $m_\alpha^* E$ 称为 E 关于 $\alpha(x)$ 的测度，记作 $m_\alpha^* E$.

类似于 L 测度，不难证明：任何区间都是 L-S 可测的.

我们注意到，第三章，§3 中所论述的 L 可测集及其测度的一切重要性质，不外乎是从 L 外测度的三个基本性质与卡氏可测条件得出的. 现在 L-S 外测度既具有完全同于 L 外测度的基本性质及测度定义仍旧是满足卡氏可测条件的，所以 L-S 可测集及其测度自然也就具有完全同于 L 可测集及测度的一切重要性质. 特别是，关于 $\alpha(x)$ 的 L-S 可测集的并、交、余运算是封闭的. 又有可数可加性等.

其次，当 $m_\alpha^* E=0$，必有 $m_\alpha E=0$，凡 Borel 集关于任何 $\alpha(x)$ 都是 L-S 可测集. 但是一般的 L-S 测度没有运动的不变性.

有了 L-S 可测集和测度之后，我们就可以在它的基础上完全平行地建立相当于 L 可测函数和积分的 L-S 可测函数和 L-S 积分的概念和有关理论. 换言之，所有第四章及本章前六节①的定义及定理几乎可以逐字逐句地搬过来，只要将那里的可测换成 L-S 可测，测度换成 L-S 测度，零测度集换成 L-S 零测度集就行了. 这样所得到的积分叫做 $f(x)$ 关于 $\alpha(x)$ 的 L-S 积分，记为 $\int_E f(x)d\alpha(x)$，其中 $E\subset R^1$ 为关于 $\alpha(x)$ 的 L-S 可测集，$f(x)$ 为 E 上的 L-S 可积或 L-S 积分确定的函数.

显然，当 $\alpha(x)=x$ 时 L-S 可测函数与 L-S 积分就分别成为 L-可测函数与 L 积分了.

以上所述 L-S 测度与 L-S 积分都是在 R^1 中讲的，当然也可以把它们推广到 R^n $(n>1)$ 中去，这里就不再多说了.

---

① 有关不定积分的结果在 L-S 积分中也有相应的推广，但只好割爱了.

第五章 习　题

1. 问对于 Lebesgue 意义下的上、下积分而言，相应于 Darboux 定理的结论是否成立？

2. 设在 Cantor 集 P_0 上定义函数 $f(x)=0$，而在 P_0 的余集中长为 $1/3^n$ 的构成区间上定义为 n $(n=1,2\cdots)$，试证 $f(x)$ 可积分，并求出积分值。

3. 设 $mE<\infty$，$f(x)$ 在 E 上可积，$e_n=E(|f|\geqslant n)$，则

$$\lim_n n\cdot me_n=0.$$

4. 设 $mE<\infty$，$f(x)$ 为 E 上可测函数，$E_n=E(n-1\leqslant f<n)$，则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $\sum_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n<\infty$.

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 E 上非负可积函数列，若 $\int_E f_n(x)dx\to 0$，则 $f_n(x)\Rightarrow 0$.

6. 设 $mE<\infty$，$\{f_n(x)\}$ 为 a.e. 有限可测函数列．证明：

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx\to 0$$

的充要条件是 $f_n(x)\Rightarrow 0$.

7. 设 $f(x)=\left(\sin\frac{1}{x}\right)\Big/x^{\alpha}$，$0<x\leqslant 1$，讨论 α 为何值时，$f(x)$ 为 $(0,1]$ 上 L 可积函数或不可积函数．

8. 设由 $[0,1]$ 中取出 n 个可测子集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，假定 $[0,1]$ 中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个，试证必有一集，它的测度大于或等于 q/n.

9. 设 $mE\neq 0$，$f(x)$ 在 E 上可积．如果对于任何有界可测函数 $\varphi(x)$，都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)dx=0,$$

则 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

10. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的可积函数，如果对任何 $c(0\leqslant c\leqslant 1)$，总有

$$\int_{[0,c]} f(x)dx=0,$$

则 $f(x)=0$, a.e. 于 $[0,1]$.

11. 证明

$$\lim_{n} \int_{(0,\infty)} \frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} t^{1/n}}=1.$$

12. 试从$\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots, 0<x<1$, 求证

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots.$$

13. 设$f(x, t)$当$|t-t_0|<\delta$时为x的在$[a, b]$上的可积函数, 又有常数K, 使

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\right| \leqslant K,\ a \leqslant x \leqslant b,\ |t-t_0|<\delta,$$

则

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t)\, dx=\int_a^b f_t'(x, t)\, dx.$$

14. 求证

$$\lim_{n} \int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2} \qquad (p>-1)$$

15. 设$f_n(x)$为E上可积函数, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. 于E, 且

$$\int_E |f_n(x)|\, dx<K, K \text{ 为常数},$$

则$f(x)$可积.

16. 设$f(x)$在$[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$上可积分, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+t)-f(x)|\, dx=0.$$

17. 设$f(x), f_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是$E$上可积函数, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. 于E, 且

$$\int_E |f_n(x)|\, dx \longrightarrow \int_E |f(x)|\, dx.$$

试证, 在任意可测子集$e \subset E$上,

$$\int_e |f_n(x)|\, dx \rightarrow \int_e |f(x)|\, dx.$$

18. 设$f(x)$在$(0, \infty)$上可积分, 且一致连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0.$$

19. 设$f(x)$在R^p上可积, $g(y)$在R^q上可积, 试证

$f(x)g(y)$ 在 $R^p \times R^q$ 上可积分.

20. 在 R: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则这两个累次积分存在且相等, 但 $f(x,y)$ 在 R 上不可积分.

21. 区间 $[a,b]$ 上任何两个单调函数, 若在一稠密集上相等, 则它们有相同的连续点.

22. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上囿变函数列, $f_n(x) \to f(x)$, 且 $|f(x)|<\infty$, 如果 $\bigvee_a^b (f_n)<K$, $(n=1,2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 为囿变函数.

23. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为绝对连续函数的充要条件是它满足 Lipschitz 条件.

24. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 且 $f'(x) \geqslant 0$ a.e. 于 $[a,b]$, 则 $f(x)$ 为增函数.

25. 试证: 如果用"确界式"定义 S 积分, 则不与原来的积分等价.

26. 试证: 如果改变增函数 $\alpha(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上不连续点的函数值(仍成一增函数), 不影响由它确定的 $L-S$ 测度.

第六章　度量空间和线性赋范空间

在第二章中，我们已给出度量空间（即距离空间）的定义，并举了 $R^n, C[a,b]$，l^2 等具体例子．当时为了集中研究 n 维欧氏空间 R^n 中的测度理论，所以只在 R^n 中讨论邻域、极限、开集、闭集等概念．但我们曾指出，这些概念可以一字不改地移到一般度量空间中去．在这一章里，我们将沿用这些概念而不再重新定义，并且运用这些概念讨论度量空间的进一步性质．

§1．度量空间的进一步例子

第三章中已经引入了 n 维度量空间的例子，现在我们继续引入其它的度量空间．

例 1　离散的度量空间．

设 X 是任意的非空集合，对 X 中任意两点 $x, y \in S$，令

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & 当\ x\neq y,\\ 0, & 当\ x=y.\end{cases}$$

容易验证 $d(x,y)$ 满足第二章中关于距离的定义中的条件 1°及2°．我们称 (X, d) 为离散的度量空间．由此可见，在任何非空集合上总可以定义距离，使它成为度量空间．

例 2　序列空间 S

令 S 表示实数列（或复数列）的全体，对 S 中任意两点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$ 及 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots)$，令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},$$

易知 $d(x,y)$满足距离条件 1°，下面验证 $d(x,y)$满足距离条件 2°。为此我们首先证明对任意两个复数 a 和 b，成立不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

事实上，考察$[0,\infty)$上的函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t},$$

由于在$[0,\infty)$上 $f'(t)=1/(1+t)^2>0$. 所以 $f(t)$在$[0,\infty)$上单调增加，由不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，我们得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

令 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)$，$a=\xi_i-\zeta_i$，$b=\zeta_i-\eta_i$，则 $a+b=\xi_i-\eta_i$，代入上面不等式，得

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqslant\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}.$$

由此立即可知 $d(x,y)$满足距离条件 2°，即 S 按 $d(x,y)$ 成一度量空间.

例 3 有界函数空间 $B(A)$

设 A 是一给定的集合，令 $B(A)$表示 A 上有界实值(或复值)函数全体，对 $B(A)$中任意两点 x,y，定义

$$d(x,y)=\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|.$$

下面验证 $d(x,y)$满足的条件 1° 和 2°. $d(x,y)$显然是非负的. 又 $d(x,y)=0$ 等价于对一切 $t\in A$，成立 $x(t)=y(t)$，所以 $x=y$，即 d 满足 1°，此外，对所有的 $t\in A$ 成立

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$
$$\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|$$
$$+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|.$$

所以

$$\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|\leqslant\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|$$
$$+\sup_{t\in A}|z(A)-y(t)|.$$

即 $d(x, y)$ 满足条件 2°. 特别地，当 $A=[a, b]$时，记 $B(A)$ 为 $B[a,b]$.

例 4 可测函数空间 $\mathfrak{M}(X)$

设 $\mathfrak{M}(X)$为X上实值(或复值)的Lebesgue 可测函数全体，m 为 Lebesgue 测度，若 $m(X)<\infty$，对任意两个可测函数 $f(t)$ 及 $g(t)$，由于

$$\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}<1,$$

所以这是 X 上可积函数，令

$$d(f,g)=\int_X\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dm.$$

如果把 $\mathfrak{M}(X)$ 中两个几乎处处相等的函数视为 $\mathfrak{M}(X)$ 中同一个元，那么利用不等式(1)及积分性质很容易验证 $d(f,g)$是距离. 因此 $\mathfrak{M}(X)$按上述距离 $d(f,g)$成为度量空间.

§2. 度量空间中的极限·稠密集·可分空间

设(X,d)为度量空间，d 是距离，定义

$$B(x_0,\varepsilon)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)<\varepsilon\}$$

为 x_0 的以 ε 为半径的开球，亦称为 x_0 的 ε-邻域.

由此，仿第二章§2，可以定义距离空间中一个点集的内点，外点，边界点及极限点，导集，闭包，开集等概念.

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (X,d) 中点列，如果存在 $x\in X$，使

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x)=0.$$

则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛点列，x 是点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限. 类似于 R^n，可以证明度量空间中收敛点列的极限是唯一的.

设 M 是度量空间 (X,d) 中点集，定义

$$\delta(M)=\sup_{x,y\in M} d(x,y)$$

为点集 M 的直径. 若 $\delta(M)<\infty$，则称 M 为 (X,d) 中的有界集. 类似于 R^n，可以证明度量空间中收敛点列是有界点集. 度量空间中闭集也可以用点列的极限来定义；M 是闭集的充要条件是 M 中任何收敛点列的极限都在 M 中，即若 $x_n\in M$，$n=1,2,\cdots$，$x_n\to x$，则 $x\in M$. 下面讨论某些具体空间中点列收敛的具体意义.

1. R^n 为 n 维欧氏空间，$x_m=(\xi_1^{(m)},\ \xi_2^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)})$，$m=1,2,\cdots$，为 R^n 中的点列，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$，不难证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按欧氏距离收敛于 x 的充分必要条件为对于每个 $1\leqslant i\leqslant n$，有 $\xi_i^{(m)}\to\xi_i$ $(m\to\infty)$.

2. $C[a,b]$ 空间，设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 x 分别为 $C[a,b]$ 中点列及点，则 $d(x_n,\ x)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|$ 收敛于 0 的充要条件为函数列 $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

3. 序列空间 S，设 $x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots,\xi_n^{(m)},\cdots)$，$m=1,2,\cdots$ 及 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \cdots)$ 分别为 S 中点列及点，下面证明点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x 的充要条件为 x_m 依坐标收敛于 x，即对每个自然数 i，成立 $\xi_i^{(m)}\to\xi_i$. 事实上，如果 $x_m\to x$，即

$$d(x_m,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}\to 0,\quad (m\to\infty)$$

所以对任何自然数 i，因为 $\dfrac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}\leqslant 2^i d(x_m,x)$，所以

$$\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|},$$

当 $m\to\infty$ 时收敛于 0. 因此，对任何给定的正数 ε，存在自然数 N，使当 $m>N$ 时成立着

$$\frac{|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(m)}-\xi_i|}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

由此可得 $|\xi_i^{(m)}-\xi_i|<\varepsilon$，这说明对每个 $i=1,2\cdots$，当 $m\to\infty$ 时，$\xi_i^{(m)}\to\xi_i$. 反之，若对每个 $i=1,2\cdots$，成立着 $\xi_i^{(m)}\to\xi_i\quad(m\to\infty)$，对任何给定正数 ε，因为级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ 收敛，所以存在自然数 m，使

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2},$$

又对每个 $i=1,2,\cdots,m-1$，存在 N_i，使当 $n>N_i$ 时，

$$|\xi_i^{(n)}-\xi|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N=\max\{N_1,\cdots,N_{m-1}\}$，那末当 $n>N$ 时

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以，当 $n>N$ 时，有

$$d(x_n,x)=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$+\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\varepsilon,$$

即 $x_n\to x$，证毕.

4. 可测函数空间 $\mathfrak{M}(X)$. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及 f 分别为 $\mathfrak{M}(X)$ 中的点列及点，则点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 f 的充要条件为函数列

$$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$$

依测度收敛于 $f(t)$. 事实上，若 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛于 $f(t)$，则对任何 $\sigma>0$, 有

$$m(X[|f_n(t)-f(t)|\geq\sigma])\to 0. \quad (n\to\infty)$$

对任意给定的正数 ε (不妨取 $\varepsilon<2m(X)$), 取

$$0<\sigma<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{m(X)-\frac{\varepsilon}{2}},$$

则 $\frac{\sigma}{1+\sigma}m(X)<\frac{\varepsilon}{2}$, 对这个 σ, 由 $f_n(t)$ 依测度收敛于 $f(t)$, 存在自然数 N, 使 $n>N$ 时，

$$m(X[|f_n(t)-f(t)|\geq\sigma])<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}
d(f_n,f)&=\int_X\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dx\\
&=\int_{X[|f_n-f|\geq\sigma]}\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dx\\
&\quad+\int_{X[|f_n-f|<\sigma]}\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dx\\
&\leq m(X[|f_n-f|\geq\sigma]),\\
&\quad+\frac{\sigma}{1+\sigma}m(X)<\varepsilon,
\end{aligned}$$

即 $d(f_n,f)\to 0$, $(n\to\infty)$. 反之如果 $d(f_n,f)\to 0$ $(n\to\infty)$, 对任意给定正数 $\sigma>0$, 由于

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma}{1+\sigma}m(X[|f_n-f|\geq\sigma])\\
&\leq\int_{X[|f_n-f|\geq\sigma]}\frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dx
\end{aligned}$$

$$\leqslant d(f_n, f),$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty} m(X[|f_n - f| \geqslant \sigma]) = 0,$$

即$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$依测度收敛于$f(t)$.

由上面一系列例子可以看到，尽管在各个具体空间中各种极限概念不完全一致(依坐标收敛，一致收敛，依测度收敛等等)，但当我们引入适当的距离以后，都可以统一在度量空间的极限概念之中，这就为统一处理提供了方便.

下面我们引入度量空间中稠密子集和可分度量空间的概念.

定义 1 设X是度量空间，N 和M是X中两个子集，令$\bar{M}$表示M的闭包，如果 $N\subset\bar{M}$，那末称集M在集N中稠密，当 $N=X$ 时称M为X的一个稠密子集. 如果X有一个可列的稠密子集，则称X是可分空间.

例 1 n 维欧氏空间 R^n 是可分空间. 事实上座标为有理数的全体是 R^n 的可列稠密子集.

例 2 离散距离空间X可分的充要条件为X是可列集. 事实上在X中没有稠密真子集，所以X中唯一的稠密子集只有X本身，因此X可分的充要条件为X是可列集.

下面举一个不可分度量空间的例子. 令 l^∞ 表示有界实（或复)数列全体，对 l^∞ 中任意两点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots)$，定义

$$d(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|.$$

易证 l^∞ 按 $d(x, y)$成为度量空间.

例 3 l^∞ 是不可分空间.

证明 令M表示 l^∞ 中坐标 ξ_i 取值为 0 或 1 的点 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)$全体，则M与二进位小数一一对应，所以M有连续统的基数.

对M中任意两个不同的点x,y，有$d(x,y)=1$，如果l^∞可分，则l^∞中存在可列稠密子集，设为$\{y_k\}$。对M中每一点x，作球$B\left(x,\frac{1}{3}\right)$，则

$$\left\{B\left(x,\frac{1}{3}\right)\Big|x\in M\right\}$$

是一族两两不相交的球，总数有不可列个。但由于$\{y_k\}$在l^∞中稠密，所以每个$B\left(x,\frac{1}{3}\right)$中至少含有$\{y_k\}$中一点，这与$\{y_k\}$是可列集矛盾，证毕。

§3. 连续映照

仿照直线上函数连续性的定义，我们引入度量空间中映照连续性的概念。

定义1 设$X=(X,d)$，$Y=(Y,\tilde{d})$是两个度量空间，T是X到Y中映照，$x_0\in X$，如果对于任意给定的正数ε，存在正数$\delta>0$，使对X中一切满足$d(x,x_0)<\delta$的x，成立

$$\tilde{d}(Tx,Tx_0)<\varepsilon,$$

则称T在x_0连续。

如果用邻域来描述，那末T在x_0连续的定义可以改述为：对Tx_0的每个ε-邻域N，必有x_0的某个δ-邻域N_0使$TN_0\subset N$，其中TN_0表示N_0在映照T作用下的像。

我们也可以用极限来定义映照的连续性。

定理1 **设T是度量空间(X,d)到度量空间$(Y,\tilde{d})$中的映照，那末T在$x_0\in X$连续的充要条件为当$x_n\to x_0$时，必有$Tx_n\to Tx_0$。**

证明 必要性，如果T在$x_0\in X$连续，那末对任意给定的正数ε，存在正数δ，使当$d(x,x_0)<\delta$时，有$\tilde{d}(Tx_0,Tx)<\varepsilon$，因为$x_n\to x$，所以存在自然数$N$，当$n>N$时，有$d(x_n,x_0)<\delta$，因此

$$\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

这就证明了 $Tx_n \to Tx_0$.

充分性，用反证法，如果 T 在 x_0 不连续，那末存在正数 $\varepsilon_0 > 0$，使对任何正数 $\delta > 0$，总有 $x \neq x_0$，满足 $d(x, x_0) < \delta$，但 $\tilde{d}(Tx_1, Tx_0) \geqslant \varepsilon_0$，特取 $\delta = \frac{1}{n}$，则有 x_n，使 $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$，但 $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geqslant \varepsilon_0$，这就是说，$x_n \to x_0$，但 Tx_n 不收敛于 Tx_0，这与假设矛盾，证毕.

如果映照 T 在 X 的每一点都连续，则称 T 是 X 上的连续映照. 我们可以用开集来刻划连续映照. 为此，称集合

$$\{x \mid x \in X, Tx \in M\}, M \subset Y$$

为集合 M 在映照 T 下的原像. 简记为 $T^{-1}M$.

关于连续映照成立着下面的定理

定理 2　度量空间 X 到 Y 中的映照 T 是 X 上连续映照的充要条件为 Y 中任意开集 M 的原像 $T^{-1}M$ 是 X 中的开集.

证明　必要性，设 T 是连续映照，$M \subset Y$ 是 Y 中开集. 如果 $T^{-1}M = \varnothing$，那末 $T^{-1}M$ 是 X 中开集. 如果 $T^{-1}M \neq \varnothing$，则对任意 $x_0 \in T^{-1}M$，令 $y_0 = Tx_0$，则 $y_0 \in M$. 由于 M 是开集，所以存在 y_0 的 ε-邻域 N，$N \subset M$，由 T 的连续性，存在 x_0 的 δ-邻域 N_0，使 $TN_0 \subset N$，这就是说

$$N_0 \subset T^{-1}N \subset T^{-1}M,$$

所以 x_0 是 $T^{-1}M$ 的内点，由 x_0 的任意性知 $T^{-1}M$ 是 X 中开集.

充分性，如果 Y 中每一个开集的原像是开集，对任意 $x_0 \in X$ 及 Tx_0 的任意 ε-邻域 N，那末 $T^{-1}N$ 是 X 中开集，又 $x_0 \in T^{-1}N$，所以 x_0 是 $T^{-1}N$ 的内点，因而存在 x_0 的某个 δ-邻域 N_0，使 $N_0 \subset T^{-1}N$，于是 $TN_0 \subset N$，这说明 T 在 x_0 连续，由 x_0 的任意性可知 T 是 X 上的连续映照，证毕.

利用 $T^{-1}(CM) = C(T^{-1}M)$，不难证明在上面定理中把开集改

为闭集后定理仍然成立.

§4. 柯西点列和完备度量空间

首先回忆一下 R^1 中柯西点列的定义. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 R^1 中的点列,如果对任意给定的正数 $\varepsilon>0$, 存在自然数 $N=N(\varepsilon)$,当 n, $m>N$ 时有

$$d(x_n, x_m)=|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 R^1 中的柯西点列. 类似地可以定义度量空间中的柯西点列.

定义 1 设 $X=(X,d)$是度量空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中点列, 如果对任何事先给定的正数 $\varepsilon>0$,存在自然数 $N=N(\varepsilon)$, 使当 $n, m>N$ 时,必有

$$d(x_n, x_m)<\varepsilon,$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是X 中的柯西点列或基本点列. 如果度量空间 (X, d)中每个柯西点列都收敛,那末称(X, d) 是完备的度量空间.

由完备度量空间的定义, 立即可知有理数全体按绝对值距离构成的空间不完备, 但n 维欧氏空间 R^n 则是完备的度量空间. 在一般度量空间中,柯西点列不一定收敛,但是度量空间中的每一个收敛点列都是柯西点列. 实际上,如果 $x_n\to x$, 那末对任何正数 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon)$,使当 $n>N$ 时,有

$$d(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此,当 $n, m>N$ 时,由三点不等式,得到

$$d(x_n, x_m)\leqslant d(x_n, x)+d(x_m, x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是柯西点列.

例 1 l^{∞} 是完备度量空间

证明 设 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$是 l^{∞} 中的柯西点列, 其中 $x_m=(\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}$

…)，于是对于任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n,m>N$ 时，

$$d(x_m,x_n)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon. \tag{1}$$

因此，对每一个固定的 j，当 $n,m>N$ 时，成立

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j^{(n)}|<\varepsilon. \tag{2}$$

这就是说，数列 $\xi_j^{(k)}, k=1,2,\cdots$ 是柯西数列，因此，存在数 ξ_j，使得 $\xi_j^{(n)}\to\xi_j(n\to\infty)$，令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$. 下面证明 $x\in l^\infty$，且 $x_n\to x$. 在(2)式中，令 $n\to\infty$，我们得到，对一切 $m>N$，成立

$$|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon, \tag{3}$$

又因 $x_m=(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\cdots,\xi_j^{(m)},\cdots)\in l^\infty$，因此存在实数 K_m，使得对所有 j，成立 $|\xi_j^{(m)}|\leqslant K_m$. 因此，

$$|\xi_j|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(m)}|+|\xi_j^{(m)}|\leqslant\varepsilon+K_m.$$

这就证明了 $x\in l^\infty$. 由(3)式，可知对一切 $m>N$，成立

$$d(x_m,x)=\sup_j|\xi_j^{(m)}-\xi_j|\leqslant\varepsilon.$$

所以 $x_m\to x$，因此 l^∞ 是完备度量空间，证毕.

令 C 表示所有收敛的实（或复）数列全体，对 C 中任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，令

$$d(x,y)=\sup_j|\xi_j-\eta_j|.$$

易证 C 是一度量空间，实际上它是 l^∞ 的一个子空间.

例 2 C 是完备的度量空间.

为此我们首先证明关于子空间完备性的一个定理.

定理 1 完备度量空间 X 的子空间 M，是完备空间的充要条件为 M 是 X 中的闭子空间.

证明 设 M 是完备子空间，对每个 $x\in\bar{M}$，存在 M 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$，使 $x_n\to x$，由前述，$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 M 中柯西点列，所以在 M 中收敛，由极限的唯一性可知 $x\in M$，即 $\bar{M}\subset M$，所以 $\bar{M}=M$，即 M 是闭子空间.

反之，如果$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中柯西点列，因X是完备度量空间，所以存在$x\in X$，使$x_n\to x$，由于M是X中闭子空间，所以$x\in M$，即$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在M中收敛，这就证明了M是完备度量空间．证毕．

例 2 的证明 由定理 1，只要证C是l^{∞}中的闭子空间即可．对任何$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in\overline{C}$，存在$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)\in C$，$n=1,2,\cdots$，$x_n\to x$，因此对任何正数$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，当$n\geqslant N$时，对所有自然数$j$，成立

$$|\xi_j^{(n)}-\xi_j|\leqslant d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{3},$$

特别取$n=N$，那末对所有j，有

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_j|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

但因$x_N\in C$，即$\xi_j^{(N)}$当$j\to\infty$时收敛，因而存在N_1，使对当$j,k\geqslant N_1$时，有

$$|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$j,k\geqslant N_1$时，成立

$$|\xi_j-\xi_k|\leqslant|\xi_j-\xi_j^{(N)}|+|\xi_j^{(N)}-\xi_k^{(N)}|+|\xi_k^{(N)}-\xi_k|<\varepsilon.$$

这说明ξ_j，$j=1,2,\cdots$是柯西数列，因而收敛，即$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in C$，所以$C$是$l^{\infty}$中的闭子空间，证毕．

例 3 $C[a,b]$是完备的度量空间．

设x_m，$m=1,2,\cdots$是$C[a,b]$中的柯西点列．于是对任何正数$\varepsilon>0$，存在自然数N，使对一切$n,m>N$，有

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x_n(t)|=d(x_m,x_n)<\varepsilon. \tag{4}$$

因此对任何$t\in[a,b]$，有

$$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

这说明当t固定时，$x_n(t)$，$n=1,2\cdots$是柯西点列，所以存在$x(t)$，

使 $x_m(t)\to x(t)$. 下面证明 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，且 $x_n\to x$，事实上在(4)中令 $n\to\infty$，那末可以得到当 $m>N$ 时，成立

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon. \tag{5}$$

这说明 $x_m(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$，所以 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，因此 $x\in C[a,b]$，且由(5)，知当 $m>N$ 时，

$$d(x_m,x)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_m(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon.$$

即 $x_m\to x$，这就说明了 $C[a,b]$ 是完备度量空间. 证毕.

下面举几个不完备空间的例子.

例 4 令 $P[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上实系数多项式全体，那么 $P[a,b]$ 作为 $C[a,b]$ 的子空间是不完备的度量空间. 事实上存在多项式列 P_k，$k=1,2\cdots$ 在 $[a,b]$ 上一致地收敛于某个非多项式的连续函数，也就是说 $P[a,b]$ 不是 $C[a,b]$ 的闭子空间，由定理 1，知道 $P[a,b]$ 不是完备度量空间.

设 X 表示闭区间 $[0,1]$ 上连续函数全体，对任何 $x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\,dt,$$

那末 (X,d) 成为度量空间，事实上，容易验证 $d(x,y)$ 满足第二章 §1 中关于距离的条件 2°. 现验证 $d(x,y)$ 满足条件 1°，事实上，$d(x,y)$ 非负显然，如果 $x(t)\equiv y(t)$，$t\in[0,1]$，则显然 $d(x,y)=0$，反之如果 $d(x,y)=0$，因为 $|x(t)-y(t)|\geqslant 0$，所以 $x(t)=y(t)$ a.e. 于 $[0,1]$，但几乎处处相等的连续函数必然恒等，所以 $x=y$.

例 5 上面定义的度量空间 (X,d) 不完备.

证明，令(图 6.1)

$$x_m(t)=\begin{cases}1, & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}\leqslant x\leqslant 1,\\ \text{线性}, & \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m},\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

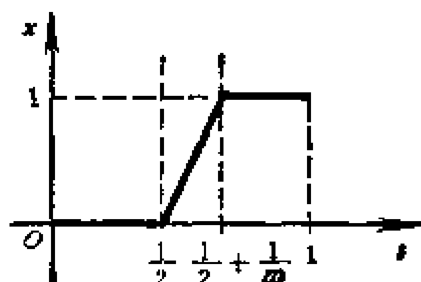


图 6.1

那末，$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 (X,d) 中的柯西点列，事实上，对任何正数 $\varepsilon>0$，当 $n>m>\frac{1}{\varepsilon}$ 时，

$$d(x_n,x_m)=\int_0^1|x_n(t)-x_m(t)|\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}|x_n(t)-x_m(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{m}<\varepsilon,$$

但对每个 $x\in X$，

$$d(x_m,x)=\int_0^1|x_m(t)-x(t)|\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}|x_m(t)-x(t)|\,dt$$
$$+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{1}|1-x(t)|\,dt.$$

如果 $d(x_m,x)\to 0$，必有 $\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|\,dt=0$，$\int_{\frac{1}{2}}^{1}|1-x(t)|\,dt=0$，但由于 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $x(t)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上恒为 0，在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上恒为 1，所以 $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}-0}x(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}+0}x(t)=1$，这与 $x(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续矛盾，因此 (X,d) 不完备，证毕.

§5. 度量空间的完备化

我们曾指出直线上有理数全体 Q 作为 R^1 的子空间不是完备的度量空间，但是我们可以将 Q "扩大"成完备的度量空间 R^1，即在 Q 中加入"无理数"，使之成为新的度量空间 R^1，并且 Q 在 R^1 中稠密. 下面我们要说明每一个不完备的度量空间都可以加以"扩

大"，即成为某个完备度量空间的稠密子空间，为此，首先介绍几个概念.

定义1 设(X,d)，$(\widetilde{X},\widetilde{d})$是两个度量空间，如果存在$X$到$\widetilde{X}$上的保距映照$T$，则称$(X,d)$和$(\widetilde{X},\widetilde{d})$等距同构，此时$T$称为$X$到$\widetilde{X}$上的等距同构映照.

在泛函分析中往往把两个等距同构的度量空间不加区别而视为同一的.

定理1 （度量空间的完备化定理） 设$X=(X,d)$**是度量空间，那末一定存在一完备度量空间，**$\widetilde{X}=(\widetilde{X},\widetilde{d})$，**使**$X$**与**$\widetilde{X}$**的某个稠密子空间**$W$**等距同构，并且**$\widetilde{X}$**在等距同构意义下是唯一的，即若**$(\hat{X},\hat{d})$**也是一完备的度量空间，且**$X$**与**$\hat{X}$**的某个稠密子空间等距同构，则**$(\widetilde{X},\widetilde{d})$**与**$(\hat{X},\hat{d})$**等距同构.**

证明 我们分成四步来证明

(1) 构造 $\widetilde{X}=(\widetilde{X},\widetilde{d})$

令$\widetilde{X}$为X中柯西点列$\widetilde{x}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$全体，对$\widetilde{X}$中任意两个元素，$\widetilde{x}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\widetilde{y}=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0, \tag{1}$$

则称$\widetilde{x}$与$\widetilde{y}$相等，记为$\widetilde{x}=\widetilde{y}$，或$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. 对$\widetilde{X}$中任意两点$\widetilde{x}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$及$\widetilde{y}=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义

$$\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{2}$$

我们首先指出上式右端极限存在，事实上，由三点不等式

$d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n)$，所以

$$d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m).$$

类似也有

$$d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m).$$

由此得到

$$|d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)|\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m). \tag{3}$$

由于$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中柯西点列，所以$\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$是$R^1$中柯西数列，因此(2)中右端极限存在.

其次，我们指出，如果$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\{y_n'\}_{n=1}^{\infty}$，则

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n'),$$

即要指出$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$与用来表示$\tilde{x}$与$\tilde{y}$的具体柯西点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$无关．事实上，类似于不等式(3)的证明，可以得到

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leqslant d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n').$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_n')=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, y_n')=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n').$$

最后证明$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$满足关于距离条件1°及2°．$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$显然非负．又$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=0$等价于$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)=0$，即$\tilde{x}=\tilde{y}$．此外，若$\tilde{x}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\tilde{y}=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\tilde{z}=\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$为$\tilde{X}$中任意三个元素，则

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{y},\tilde{z}).$$

由此$\tilde{X}$按$\tilde{d}$成为度量空间．

(2) 作$\tilde{X}$的稠密子空间W，及X到W的等距映照T．

对每个$b\in X$，令$\tilde{b}=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中$b_n=b$，$n=1,2,\cdots$，显然$\tilde{b}\in\tilde{X}$．令

$$Tb=\tilde{b},$$

$W=TX$，因
$$\tilde{d}(Tb, Ta) = \tilde{d}(\tilde{b},\tilde{a}) = \lim_{n\to\infty} d(b, a) = d(b, a).$$

所以T是X到W上的等距映照，即X与W等距同构下证W是$\tilde{X}$中的稠密子集，对任何$\tilde{x}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\tilde{X}$，令$\tilde{x}_n=\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$，其中$x_j=x_n$，$j=1,2\cdots$，则$\tilde{x}_n\in W$，因$\tilde{x}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$X$中柯西列，所以对任何正数$\varepsilon>0$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时，

$$d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

这说明在$\tilde{x}$的任何ε-邻域中必有W中的点，所以W在$\tilde{X}$中稠密．

(3) 证明$\tilde{X}$是完备的度量空间．

设$\{\tilde{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$是$\tilde{X}$中柯西点列．因$W$在$\tilde{X}$中稠密，所以对每个$\tilde{x}^{(n)}$，存在

$\tilde{z}_n\in W$，使

$$\tilde{d}(\tilde{x}^{(n)},\tilde{z}_n)<\frac{1}{n},\tag{4}$$

由三点不等式

$$\tilde{d}(\tilde{z}_m,\tilde{z}_n)\leqslant\tilde{d}(\tilde{z}_m,\tilde{x}^{(m)})+\tilde{d}(\tilde{x}^{(m)},\tilde{x}^{(n)})+\tilde{d}(\tilde{x}^{(n)},\tilde{z}_n)$$

$$\leqslant\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\tilde{d}(\tilde{x}^{(m)},\tilde{x}^{(n)}).$$

由此可知 $\{\tilde{z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是W中柯西点列，因为T是X到W上等距映照，所以$\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$是X中柯西点列，令 $\tilde{x}=\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ 则 $\tilde{x}\in\tilde{X}$，又由(4)

$$\tilde{d}(\tilde{x}^{(n)},\tilde{x})\leqslant\tilde{d}(\tilde{x}^{(n)},\tilde{z}_n)+\tilde{d}(\tilde{z}_n,\tilde{x})<\frac{1}{n}+\tilde{d}(\tilde{z}_n,\tilde{x})$$

$$=\frac{1}{n}+\lim_{m\to\infty}d(z_n,z_m),$$

但上式右边当n足够大时，可以小于事先给定的任意正数ε，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{d}(\tilde{x}^{(n)},\tilde{x})=0$，因而$\tilde{X}$是完备度量空间。

(4) 证明$\tilde{X}$的唯一性

如果$(\hat{X},\hat{d})$是另一个完备度量空间，而且X与$(\hat{X},\hat{d})$中稠密子集$\hat{W}$等距同构。

作$\hat{X}$到$\tilde{X}$上映照T如下：对任何$\hat{x}\in\hat{X}$，由$\hat{W}$在$\hat{X}$中稠密性，存在$\hat{W}$中点列$\{\hat{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，使$\hat{x}^{(n)}\to\hat{x}$，但由于$\hat{W}$与$X$等距同构，$W$也与$X$等距同构，易知$\hat{W}$与$W$也等距同构，设$\varphi$为$\hat{W}$到$W$上等距同构映照，由$\hat{x}^{(n)}\to\hat{x}$，易知$\{\varphi(\hat{x}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$是$\tilde{X}$中柯西点列，由$\tilde{X}$的完备性，存在$\tilde{x}\in\tilde{X}$，使$\varphi(\hat{x}^{(n)})\to\tilde{x}$，令

$$T\hat{x}=\tilde{x}.$$

首先，这样定义的T与$\{\hat{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$无关，即若另有$\{\hat{y}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，$\hat{y}^{(n)}\in\hat{W}$，$n=1,2,\cdots$，$\hat{y}^{(n)}\to\hat{x}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\hat{x}^{(n)})=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\hat{y}^{(n)})$，事实上

$$\tilde{d}(\lim_{n\to\infty}\varphi(\hat{x}^{(n)}),\lim_{n\to\infty}\varphi(\hat{y}^{(n)}))=\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(\varphi(\hat{x}^{(n)}),\varphi(\hat{y}^{(n)}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\hat{d}(\hat{x}^{(n)},\hat{y}^{(n)})=\hat{d}(\hat{x},\hat{x})=0.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\hat{x}^{(n)})=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\hat{y}^{(n)})$。下证$T$是$\hat{X}$到$\tilde{X}$上等距同构映照。对任何$\tilde{x}\in\tilde{X}$，由于$W$是$\tilde{X}$中稠密子集，所以存在$W$中点列$\{\tilde{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，使$\tilde{x}^{(n)}\to\tilde{x}$，同前证明，可知$\{\varphi^{-1}(\tilde{x}^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$为$\hat{X}$中柯西点列，故有$\hat{x}\in\hat{X}$，使$\varphi^{-1}(\tilde{x}^{(n)})\to\hat{x}$，易知$T\hat{x}=\tilde{x}$，即$T$映照$\hat{X}$到$\tilde{X}$上，又对任何$\hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$，有$\hat{W}$中点列$\{\hat{x}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$和$\{\hat{y}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，使$\hat{x}^{(n)}\to\hat{x}$，$\hat{y}^{(n)}\to\hat{y}$，所以

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{y})=\lim_{n\to\infty}\hat{d}(\hat{x}^{(n)},\hat{y}^{(n)})=\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(\varphi(\hat{x}^{(n)}),\varphi(\hat{y}^{(n)}))$$
$$=\tilde{d}(T\hat{x},T\hat{y}),$$

这就证明了T是一个等距同构映照. 所以$\hat{X}$与$\tilde{X}$等距同构. 证毕.

如果我们把两个等距同构的度量空间不加以区别，视为同一，那末定理 1 可以改述如下:

定理 1′ 设 $X=(X,d)$**是度量空间，那末存在唯一的完备度量空间** $\tilde{X}=(\tilde{X},\tilde{d})$，**使**$X$**为** $\tilde{X}$ **的稠密子空间.**

§6. 压缩映照原理及其应用

作为完备度量空间概念的应用，我们介绍 Banach 的压缩映照原理，它在许多关于唯一存在性的定理(例如微分方程，代数方程，积分方程等)的证明中是一个有力的工具.

定义 1 设X是度量空间，T是X到X中的映照，如果存在一个数α，$0<\alpha<1$，使得对所有的$x,y\in X$，成立

$$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y),\tag{1}$$

则称T是压缩映照.

压缩映照在几何上的意思是说点x和y经T映照后，它们像的距离缩短了，不超过$d(x,y)$的α倍($\alpha<1$).

定理 1 (压缩映照定理) **设**X**是完备的度量空间，**T**是**X**上的压缩映照，那末**T**有且只有一个不动点**(就是说，方程 $Tx=x$，有且只有一个解).

证明 设x_0是X中任意一点. 令$x_1=Tx_0$，$x_2=Tx_1=T^2x_0$，$\cdots$，$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0$，$\cdots$. 我们证明点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中柯西点列。事实上

$$\begin{aligned}d(x_{m+1},x_m)&=d(Tx_m,Tx_{m-1})\leqslant\alpha d(x_m,x_{m-1})\\&=\alpha d(Tx_{m-1},Tx_{m-2})\leqslant\alpha^2d(x_{m-1},x_{m-2})\\&\leqslant\cdots\leqslant\alpha^md(x_1,x_0).\end{aligned}\tag{2}$$

由三点不等式，当 $n>m$ 时，

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots \\
&\quad + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leqslant (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\
&= \alpha^m \cdot \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0, x_1).
\end{aligned}
$$

因 $0<\alpha<1$，所以 $1-\alpha^{n-m}<1$，于是得到

$$
d(x_m, x_n) \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \quad (n>m) \tag{3}
$$

所以当 $m\to\infty$, $n\to\infty$ 时，$d(x_m, x_n)\to 0$，即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中柯西点列，由 X 完备性，存在 $x\in X$，使 $x_m\to x$，又由三点不等式和条件(1)，我们有

$$
\begin{aligned}
d(x, Tx) &\leqslant d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\
&\leqslant d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x).
\end{aligned}
$$

上面不等式右端当 $m\to\infty$ 时趋向于 0，所以 $d(x, Tx)=0$，即 $x=Tx$.

下证唯一性。如果又有 $\tilde{x}\in X$，使 $T\tilde{x}=\tilde{x}$，则由条件(1)，

$$
d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leqslant \alpha d(x, \tilde{x}).
$$

因 $\alpha<1$，所以必须 $d(x, \tilde{x})=0$，即 $x=\tilde{x}$，证毕.

压缩映照原理在分析，微分方程，积分方程，代数方程解的存在和唯一性定理证明中起了重要作用，由于篇幅所限，这里只能介绍隐函数存在定理以及常微分方程解的存在性和唯一性定理(Picard).

定理 2 **设函数 $f(x、y)$ 在带状域**

$$
a\leqslant x\leqslant b, \quad -\infty<y<\infty
$$

中处处连续，且处处有关于 y 的偏导数 $f'_y(x、y)$. 如果还存在常数 m 和 M，满足

$$
0<m\leqslant f'_y(x、y)\leqslant M,
$$

则方程 $f(x,y)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$，使得

$$f(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad x\in[a,b].$$

证　在完备空间 $C[a,b]$ 中作映照 A，使对任意的函数 $\varphi(x)\in C[a,b]$，有 $(A\varphi)(x)=\varphi(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi(x))$. 按照定理条件，$f(x,y)$ 是连续的，故 $(A\varphi)(x)$ 也连续，即 $A\varphi\in C[a,b]$. 所以 A 是 $C[a,b]$ 到自身的映照.

现证 A 是压缩映照. 任取 $\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$，根据微分中值定理，存在 $0<\theta<1$，满足

$$\begin{aligned}|(A\varphi_2)(x)-(A\varphi_1)(x)|&=\left|\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_2)\right.\\&\left.-\varphi_1(x)+\frac{1}{M}f(x,\varphi_1)\right|=|\varphi_2(x)\\&-\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f'_y[x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)\\&-\varphi_1(x))]\cdot(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))|\\&\leqslant|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\left(1-\frac{m}{M}\right).\end{aligned}$$

由于 $0<\frac{m}{M}<1$，所以令 $\alpha=\left(1-\frac{m}{M}\right)$，则有 $0<\alpha<1$，且

$$|A\varphi_2-A\varphi_1|\leqslant\alpha|\varphi_2-\varphi_1|.$$

按 $C[a,b]$ 中距离的定义，即知

$$d(A\varphi_2-A\varphi_1)\leqslant\alpha d(\varphi_2-\varphi_1).$$

因此，A 是压缩映照。由定理 1，存在唯一的 $\varphi\in C[a,b]$ 满足 $A\varphi=\varphi$，即 $\varphi(x)\equiv\varphi(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi(x))$，这就是说

$$f(x,\varphi(x))\equiv 0,\quad a\leqslant x\leqslant b$$

定理证毕.

定理 3 (Picard) 设 $f(t,x)$ 是矩形

$$R=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$$

上的二元连续函数，设 $|f(t,x)|\leqslant M$，$(t,x)\in R$，又 $f(t,x)$ 在 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 K，使对任意的 (t,x)、$(t,v)\in R$，有

$$|f(t,x)-f(t,v)|\leqslant K|x-v|, \tag{4}$$

那末方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 在区间 $J=[t_0-\beta,\ t_0+\beta]$ 上有唯一的满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的连续函数解，其中

$$\beta<\min\left\{a,\frac{b}{M},\ \frac{1}{K}\right\}. \tag{5}$$

证明. 设 $C[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 表示区间 $[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 上连续函数全体按距离 $d(x,y)=\max\limits_{t\in J}|x(t)-y(t)|$ 所成的度量空间. 由本章 § 4, 例 3 知 $C[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 是完备度量空间，又令 $\widetilde{C}$ 表示 $C[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 中满足条件

$$|x(t)-x_0|\leqslant M\beta \qquad (t\in J) \tag{6}$$

的连续函数全体所成的子空间，不难看出 $\widetilde{C}$ 是闭子空间，由 § 4. 定理 1, $\widetilde{C}$ 是完备度量空间. 令

$$Tx(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(t,x(t))dt, \tag{7}$$

则 T 是 $\widetilde{C}$ 到 $\widetilde{C}$ 中的映照，事实上，因 $M\beta<b$，所以如果 $x\in\widetilde{C}$，那末当 $t\in[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 时，$(t,x(t))\in R$，又因 $f(t,x)$ 是 R 上二元连续函数，所以(7)式右端积分有意义. 又对一切 $t\in J$，成立

$$|Tx(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(t,x(t))dt\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant M\cdot\beta,$$

所以，当 $x\in\widetilde{C}$ 时，$Tx\in\widetilde{C}$. 下面我们指出 T 是压缩映照，事实上由 Lipschitz 条件(4)，对 $\widetilde{C}$ 中任意两点 x 和 v，有

$$\begin{aligned}|Tx(t)-Tv(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}[f(t,x)-f(t,v)]dt\right|\\&\leqslant|t-t_0|\cdot K\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-v(t)|\\&\leqslant K\beta d(x,v).\end{aligned}$$

令 $\alpha=K\beta$，则 $0<\alpha<1$，且

$$d(Tx,Tv)=\max_{t\in J}|Tx(x)-Tv(t)|\leqslant\alpha d(x,v),$$

所以 T 是 $\widetilde{C}$ 上压缩映照，由定理 1，存在唯一 $x\in\widetilde{C}$，使 $Tx=x$，即

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,x(t))dt, \tag{8}$$

且 $x(t_0)=x_0$，两边对 t 求导，即得

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)).$$

这说明 $x(t)$ 是方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,\ x)$ 满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解. 另外，如果 $\tilde{x}=\tilde{x}(t)$ 也是此方程满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解，那末，

$$\tilde{x}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(t,\tilde{x}(t))dt,$$

因而 $\tilde{x}\in\tilde{C}$，且 $\tilde{x}$ 是 T 的不动点，由定理 1 中不动点的唯一性必有 $\tilde{x}=x$，即方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 在区间 $[t_0-\beta,\ t_0+\beta]$ 上有唯一的满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的连续函数解，证毕.

压缩映照原理不仅证明了方程 $Tx=x$ 解的存在性和唯一性，而且也提供了求解的方法——逐次逼近法，即只要任取 $x_0\in X$，令 $x_n=T^nx_0$，则解 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。如果在(3)中，令 $n\to\infty$，则有

$$d(x_m,x)\leqslant\frac{\alpha^m}{1-\alpha}d(x_0,x_1). \tag{9}$$

(9)式给出了用 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 逼近解 x 的误差估计式。

§7. 线 性 空 间

在许多数学问题和实际问题中，我们遇到的空间不仅要求有极限运算，而且还要求有所谓的加法和数乘的代数运算.

定义 1 设 X 是一非空集合，在 X 中定义了元素的加法运算和实数(或复数)与 X 中元素的乘法运算，满足下列条件：

(一) 关于加法成为交换群，即对任意 $x,y\in X$，存在 $u\in X$ 与之对应，记为 $u=x+y$，称为 x 与 y 的和，满足

1) $x+y=y+x$,

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$，(任何 $x,y,z\in X$)

3) 在X中存在唯一元素θ，使对任何$x\in X$，成立$x+\theta=x$，称θ为X中零元素.

4) 对X中每个元素x，存在唯一元素$x'\in X$，使$x+x'=\theta$，称x'为x的负元素，记为$-x$.

(二) 对于X中每个元素$x\in E$，及任何实数(或复数)a，存在元素$u\in X$与之对应，记为$u=ax$，称为a与x的数积，满足

1) $1x=x$;

2) $a(bx)=(ab)x$ 对任何实数(或复数)a和b成立.

3) $(a+b)x=ax+bx$; $a(x+y)=ax+ay$,

则称X按上述加法和数乘运算成为线性空间或向量空间，其中的元素称为向量。如果数积运算只对实数(复数)有意义，则称X是实(复)线性空间. 读者不难证明，对所有向量x和数a，成立

$$0x=\theta,$$

$$a\theta=\theta,$$

$$(-1)x=-x.$$

以后仍把零元素θ记为0.

下面举一些线性空间的例子。

例1 R^n，对R^n中任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,y_n)$和任何实(复)数$a$，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+y_n)$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots,a\xi_n)$$

容易验证R^n按上述加法和数乘运算成实(复)线性空间.

例2 $C[a,b]$，对$C[a,b]$中任意两个元素x,y和数a，定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\quad t\in[a,b]$$

$$(ax)(t)=ax(t),\quad t\in[a,b]$$

则$C[a,b]$按上述加法运算和数乘运算成为线性空间.

一般，设 Q 为一集，F 表示 Q 上某些函数所成的函数族，在 F 中按通常方法规定加法和数乘如下：对任何 $t\in Q$，令

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\qquad f,g\in F$$

$$(af)(t)=af(t),\qquad f\in F,\quad a\text{ 是数}$$

如果对任何 $f,g\in F$ 和任何数 a，按这样定义的 $f+g$ 和 af 仍属于 F，那末 F 按上述加法和数乘运算成为线性空间．此后若不另作说明，对函数空间总是采取上述的加法和数乘运算．

例 3　空间 $l^p(p>0)$

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 是实(或复)数列，如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$，则称数列 $(\xi_1,\ \xi_2,\cdots)$ 是**p 次收敛数列**，p 次收敛数列全体记为 l^p．对 l^p 中任何两个元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 和任何实数(或复数)a，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\xi_3+\eta_3,\cdots)$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,a\xi_3,\cdots)$$

下面证明这样定义的 $x+y$ 和 ax 仍属于 l^p，事实上，因

$$|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant(|\xi_i|+|\eta_i|)^p\leqslant(2\max_i(|\xi_i|,|\eta_i|))^p$$
$$=2^p(\max_i(|\xi_i|,|\eta_i|))^p\leqslant2^p(|\xi_i|^p+|\eta_i|^p),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant2^p\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p+\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)<\infty.$$

即 $x+y\in l^p$，容易证明 $ax\in l^p$，所以 $l^p(p>0)$ 按上述加法与数乘运算成为线性空间．

一般，如果 S 是由某些实数列(或复数列)所组成的集合，对任何 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in S$，以及任何数 a，定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\xi_3+\eta_3,\cdots),$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,a\xi_3,\cdots).$$

若 $x+y$, ax 仍属于 S, 则 S 按上述加法及数乘运算成为线性空间，若不另作说明，在数列空间中，我们总采用上面定义的加法和数乘运算.

设 X 是线性空间，Y 是 X 的非空子集，如果对任何 $x, y\in Y$，及任何数 a，都有 $x+y\in Y$ 及 $ax\in Y$，那末 Y 按 X 中加法及数乘运算也成为线性空间，称为 X 的子空间. X 和 $\{0\}$ 是 X 的两个子空间，称为平凡的子空间，若 $X\neq Y$，则称 Y 是 X 的真子空间.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性空间 X 中的向量，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 m 个数（若 X 为实线性空间，则 α_i, $i=1,2\cdots, m$ 为实数，若 X 为复线性空间，则为复数，以下类同，不另作说明），称 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m$ 为向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一个线性组合. 设 M 为 X 的一个非空子集，M 中任意有限个向量线性组合全体记为span$M$，称为由 M 张成的线性包，容易证明 span$M$ 是 X 的线性子空间，并且是 X 中包含 M 的最小线性子空间，即若 F 是 X 中包含 M 的线性子空间，那么必有 $F\supset$ span$M$.

定义 2 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性空间 X 中的向量，如果存在 n 个不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0 \tag{1}$$

则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性相关，否则称为线性无关.

不难看出 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 线性无关充要条件为若 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i=0$，必有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$

定义 3 设 M 是线性空间 X 的一个子集，如果 M 中任意有限个向量都线性无关，则称 M 是 X 中线性无关子集. 设 M 和 N 为 X 中两个子集，若 M 中任何向量与 N 中任何向量都线性无关，则称 M 和 N 线性无关.

线性无关与线性相关与所取数域有关，在实数域上线性无关

的向量组在复数域中可能线性相关.

定义 4 设X是线性空间, M是X中线性无关子集, 如果 span $M=X$, 则称M的基数为X的维数, 记为 $\dim X$, M 称为X的一组基. 如果M的基数为有限数, 则称X是有限维线性空间, 否则称 X 是无限维线性空间. 如果 X只含零元素, 称X为零维线性空间.

在线性代数中已经证明, 任何有限维空间的维数不随基的不同而改变.

欧氏空间 R^n 是一 n 维线性空间, 向量组

$$e_1=(1,0,0\cdots,0),$$
$$e_2=(0,1,0\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,0\cdots,0),$$

构成 R^n 的一组基, 称它为 R^n 的标准基.

$C[a,b]$是无限维线性空间, 事实上, 如果$C[a,b]$的所有元素都能表示为n_0个元素 $f_1, f_2, \cdots, f_{n_0}$. 的线性组合, 那么 1, t, t^2, $\cdots$, t^{n_0} 都属于 $C[a,b]$, 这 n_0+1 个元素都能用 $f_1, f_2, \cdots, f_{n_0}$ 表示出来, 即它们是线性相关的. 然而, 众所周知, $1, t^1, t^2, \cdots, t^n$, 对任何 n 都是线性无关的. 因此, $C[a,b]$只能是无限维的线性空间.

§8. 线性赋范空间和巴拿赫空间

在泛函分析中, 特别重要和有用的一类度量空间是线性赋范空间. 在线性赋范空间中的元素可以相加或者数乘, 元素之间不仅有距离, 而且每个元素有类似于普通向量长度的叫做范数的量.

定义 1 设X是实(或复)的线性空间, 如果对每个向量 $x\in X$, 有一个确定的实数, 记为$\|x\|$与之对应, 并且满足:

1° $\|x\|\geqslant 0$, 且$\|x\|=0$ 等价于 $x=0$

2° $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$其中 α 为任意实(复)数.

3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad x,y\in X$

则称$\|x\|$为向量 x 的范数，称X按范数$\|x\|$成为线性赋范空间.

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中点列，如果存在 $x\in X$，使$\|x_n-x\|\to0(n\to\infty)$则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$依范数收敛于$x$. 记为 $x_n\to x(n\to\infty)$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

如果令

$$d(x,y)=\|x-y\|.\quad(x,y\in X)$$

容易验证$d(x,y)$是X上的距离，且$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$依范数收敛于x等价于$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$按距离$d(x,y)$收敛于x. 称$d(x,y)$为由范数$\|x\|$导出的距离. 所以线性赋范空间实际上是一种特殊的度量空间. 如果$d(x,y)$是由$\|x\|$导出的距离，那末这种距离和线性运算之间有某种关系，即对任何数α和向量$x,y\in X$，有

$$\begin{aligned}&(a)\qquad d(x-y,0)=d(x,y),\\&(b)\qquad d(\alpha x,0)=|\alpha|d(x,0).\end{aligned}\tag{1}$$

反之，如果X是线性空间，d是X上的距离，并且满足条件(a)和(b)，那末一定可以在X上定义范数$\|x\|$，使d是由$\|x\|$所导出的距离，事实上，令$\|x\|=d(x,0)$，由条件(a)，(b)，不难证明这样定义的$\|x\|$是范数，且$d(x,y)=\|x-y\|$. 条件(a)，(b)反映了空间的度量结构和线性结构之间具有某种协调性.

我们可以证明$\|x\|$是x的连续函数，事实上，对于任何$x,y\in X$，由范数条件2°和3°，不难证明成立不等式

$$|\|y\|-\|x\||\leqslant\|y-x\|,\tag{2}$$

所以当$\|x_n-x\|\to0$时，$\|x_n\|\to\|x\|$.

完备的线性赋范空间称为Banach(巴拿赫)空间. 下面举一些今后常用的线性赋范空间的例子.

例1 欧氏空间R^n，对每个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$，定义

$$\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2}.\tag{3}$$

如果令 $d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2}$,
$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\in R^n$, 则 $d(x、y)$即为 R^n 中欧几里得距离，且满足(1)中条件(a)及(b), 由此可知$\|x\|$是 R^n 中范数，又因 R^n 完备，故 R^n 按(3)中范数成 Banach 空间.

例 2 空间 $C[a, b]$, 对每个 $x\in C[a, b]$, 定义

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|. \tag{4}$$

容易证明 $C[a, b]$按(4)中范数成为 Banach 空间.

例 3 空间 l^∞, 对每个 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)\in l^\infty$, 定义

$$\|x\|=\sup_j|\xi_j|. \tag{5}$$

不难验证 l^∞按(5)中范数成为 Banach 空间.

下面介绍两个重要的 Banach 空间.

例 4 空间 $L^p[a, b]$.

设 $f(t)$是$[a, b]$上实值可测函数，$p>0$, 如果$|f(x)|^p$是$[a, b]$上 Lebesgue 可积函数，则称 $f(t)$是$[a, b]$上 p 方可积函数，$[a, b]$上 p 方可积函数全体记为 $L^p[a, b]$. 当 $p=1$ 时, $L^1[a, b]$即为$[a, b]$上Lebesgue 可积函数全体. 在空间 $L^p[a, b]$中, 我们把两个 a.e. 相等的函数视为 $L^p[a, b]$中同一个元素而不加以区别. 设 f, $g\in L^p[a, b]$, 因为

$$\begin{aligned}|f(t)+g(t)|^p&\leqslant(2\max\{|f(t)|, |g(t)|\})^p\\&\leqslant 2^p(|f(t)|^p+|g(t)|^p).\end{aligned}$$

所以, $|f(t)+g(t)|^p$是$[a, b]$上 Lebesgue 可积函数, 即 $f+g\in L^p[a, b]$. 至于 $L^p[a, b]$关于数乘运算封闭是显见的，于是 $L^p[a, b]$按函数通常的加法及数乘运算成为线性空间. 对每个 $f\in L^p[a, b]$, 定义

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

我们要证明当 $p\geqslant 1$ 时, $L^p[a, b]$按$\|f\|_p$ 成为 Banach 空间. 为此,

首先证明几个重要的不等式。

引理 1 （Hölder 不等式），设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^p[a,b]$, $g\in L^q[a,b]$, 那末 $f(t)g(t)$在$[a,b]$上 Lebesgue 可积，并且成立

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{7}$$

证明 首先证明当 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，对任何正数 A 及 B, 有

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{A}{p}+\frac{B}{q}. \tag{8}$$

事实上，作辅助函数 $\varphi(t)=t^{\alpha}-\alpha t\,(0<t<+\infty)$, $0<\alpha<1$, 则 $\varphi'(t)=\alpha[t^{\alpha-1}-1]$, 所以在$(0,1)$上，$\varphi'(t)>0$, 在$(1,+\infty)$上 $\varphi'(t)<0$, 因而 $\varphi(1)$是函数 $\varphi(t)$在$(0,+\infty)$上的最大值，即

$$\varphi(t)\leqslant\varphi(1)=1-\alpha,\quad t\in(0,+\infty)$$

由此可得

$$t^{\alpha}\leqslant\alpha t+(1-\alpha).\qquad t\in(0,+\infty)$$

令 $t=\frac{A}{B}$, 代入上面不等式，那末

$$\frac{A^{\alpha}}{B^{\alpha}}\leqslant\alpha\frac{A}{B}+(1-\alpha),$$

两边乘 B, 得到

$$\frac{A^{\alpha}}{B^{\alpha-1}}\leqslant\alpha A+(1-\alpha)B.$$

令 $\alpha=\frac{1}{p}$, 则 $1-\alpha=\frac{1}{q}$, 于是上式成为

$$A^{\frac{1}{p}}\cdot B^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{A}{p}+\frac{B}{q}.$$

如果$\|f\|_p=0$（或$\|g\|_q=0$），则 $f(t)=0$(a.e.)（或 $g(t)=0$(a.e.)），这时，不等式(7)自然成立，所以不妨设$\|f\|_p>0$, $\|g\|_q>0$. 作

函数

$$\varphi(t)=\frac{|f(t)|}{\|f\|_p},\ \varphi(t)=\frac{|g(t)|}{\|g\|_q}.$$

令 $A=|\varphi(t)|^p, B=|\psi(t)|^q$, 代入不等式(8), 得到

$$|\varphi(t)\psi(t)|\leqslant\frac{|\varphi(t)|^p}{p}+\frac{|\psi(t)|^q}{q}. \tag{9}$$

由(9)立即可知 $\varphi(t)\psi(t)$在 $[a, b]$ 上 Lebesgue 可积, 由此可知 $f(t)g(t)$也 Lebesgue 可积, 对(9)的两边积分, 得到

$$\int_a^b|\varphi(t)\psi(t)|\,dt\leqslant\int_a^b\frac{|\varphi(t)|^p}{p}dt+\int_a^b\frac{|\psi(t)|^q}{q}dt=1.$$

因此

$$\int_a^b|f(t)q(t)|\,dt\leqslant\|f\|_p\|g\|_q.$$

证毕.

引理 2 (Minkowski 不等式)设 $p\geqslant1, f, g\in L^p[a,b]$, 那末 $f+g\in L^p[a,b]$, 并且成立不等式

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p. \tag{10}$$

证明, 当 $p=1$ 时, 因 $|f(t)+g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|$, 由积分性质可知不等式(10)自然成立. 如果 $p>1$, 因为 $f+g\in L^p[a,b]$, 所以

$$|f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}}\in L^q[a,b],$$

由 Hölder 不等式, 有

$$\int_a^b|f(t)|\,|f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}}dt\leqslant\|f\|_p\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

类似对 g 也有

$$\int_a^b|g(t)|\,|f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}}dt\leqslant\|g\|_p\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

因而

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,|f(t)+g(t)|^{p-1} dt$$

$$\leqslant \int_a^b |f(t)|\,|f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}} dt + \int_a^b |g(t)|\,|f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}} dt$$

$$\leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (11)$$

若$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt=0$，则$\|f+g\|_p=0$，(10)式显然成立，若$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\neq 0$，则在(11)式两边除$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$，得到

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

由$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，得到

$$\|f+g\|_p = \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证毕.

定理 1 **当 $p\geqslant 1$ 时，$L^p[a,b]$ 按(6)中范数 $\|f\|_p$ 成为线性赋范空间.**

证明 $\|f\|_p$ 满足范数条件 1° 及 2° 是显然的. 又由 Minkowski 不等式，当 $p\geqslant 1$ 时，对任何 $f, g\in L^p[a,b]$ 有 $\|f+g\|_p\leqslant \|f\|_p+\|g\|_p$，所以 $L^p[a,b]$ 按 $\|f\|_p$ 成线性赋范空间，证毕.

定理 2 $L^p[a,b]$($p\geqslant 1$)是 Banach 空间.

证明 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $L^p[a, b]$ 中柯西点列，由柯西点列的定义，存在自然数 m_k，使当 $n, m\geqslant m_k$ 时，成立

$$\|f_n-f_m\|_p<\frac{1}{2^k},\ k=1,2,\cdots$$

取 $n_k\geqslant m_k$，且使 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，则

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|_p<\frac{1}{2^k},\quad k=1,2,\cdots$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\infty. \tag{12}$$

但是因为常数 $1\in L^q[a,b]$, 由 Hölder 不等式, 成立

$$\int_a^b|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|dt\leqslant\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p(b-a)^{\frac{1}{q}}.$$

所以级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|dt \tag{13}$$

收斂, 由级数形式的 Levi 定理, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)|$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收斂. 因此, 函数列

$$f_{n_k}(t)=f_{n_1}(t)+\sum_{j=1}^{k-1}(f_{n_{j+1}}(t)-f_{n_j}(t))$$

在 $[a,b]$ 上几乎处处收斂于一可测函数 $f(t)$. 下面证明 $f(t)\in L^p[a,b]$. 因为 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p[a,b]$ 中柯西点列, 对于任何正数 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使当 $n,m\geqslant N$ 时, $\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$, 取足够大的 k_0, 使 $n_{k_0}>N$, 于是当 $k\geqslant k_0$, $n\geqslant N$ 时, 就有

$$\int_a^b|f_n(t)-f_{n_k}(t)|^p dt=\|f_n-f_{n_k}\|^p<\varepsilon^p.$$

又因当 $k\to\infty$ 时函数列 $|f_n(t)-f_{n_k}(t)|^p\to|f_n(t)-f(t)|^p$ a.e., 由 Fatou 定理得到 $|f_n(t)-f(t)|^p$ 是 Lebesgue 可积函数, 并且有

$$\int_a^b|f_n(t)-f(t)|^p dt\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_a^b|f_n(t)-f_{n_k}(t)|^p dt\leqslant\varepsilon^p,$$

这说明 $f(t)-f_n(t)\in L^p[a,b]$, 且当 $n\geqslant N$ 时

$$\|f_n-f\|_p\leqslant\varepsilon. \tag{14}$$

又因 $f_n\in L^p[a,b]$，而 $f=[f-f_n]+f_n$，由于 $L^p[a,b]$是线性空间，所以 $f\in L^p[a,b]$，由(13)，$f_n\to f$，这就证明了 $L^p[a,b]$是 Banach 空间，证毕.

对 $C[a,b]$中每个函数 $f(t)$，定义

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\quad (p\geqslant 1)$$

那末 $C[a,b]$按$\|f\|_p$成为 $L^p[a,b]$的线性赋范子空间，类似于§4，例 5 的证明，可以证明 $C[a,b]$按范数$\|f\|_p$不完备，但是可以证明它的完备化空间是 $L^p[a,b]$. 从这个观点看，Lebesgue 可积函数类只不过是黎曼可积函数类的完备化拓广.

例 5 空间 l^p

和 $L^p[a,b]$空间一样，在 l^p空间中也有类似的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(Hölder 不等式)，$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

其中 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^p$，$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots)\in l^q$，

(Minkowski 不等式) $\|x+y\|_p\leqslant\|x\|_p+\|y\|_p$，其中 $p\geqslant 1$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p$，$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$\|y\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 由此可知 l^p 按范数 $\|x\|_p$ 成线性赋范空间，并且不难证明 l^p完备，这些留给读者自己证明.

最后，让我们考察有限维线性赋范空间的性质.

定理 3 **设 X 是 n 维线性赋范空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 X 的一组基，则存在常数 M 和 M'，使得对一切**

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$$

成立

$$M\|x\|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M'\|x\|.$$

证 对任意 $x\in E$, 有

$$\|x\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|e_k\||\xi_k|$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记 $m=\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 则有 $\|x\|\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

任取 $y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\in X$, 由上述不等式知

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这说明, 范数 $\|x\|$ 是欧氏空间 R^n 上的连续函数, 记

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|.$$

当 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 位于 R^n 的单位球面 S 上, 即

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2=1\text{ 时, }\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|=\|x\|\neq 0.$$

实际上, 若 $\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right\|=0$, 必有 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=0$. 因 $\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2=1$, ξ_1, $\xi_2,\cdots,\xi_n$ 不全为 0, 再由 $\{e_k\}$ 是线性无关的, 获得矛盾, 这就是说 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|$ 在 S 上处处不为 0, 因 S 是 R^n 中有界闭集, $\|x\|$ 在 S 上取得非零的最小值 m', $m'>0$, 于是, 对任意的 $x\in X$, 作 $x'=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{-\frac{1}{2}}x$, 则 $x'\in S$. 因而

$$m'\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x'\|=\|x\|\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令$M=\frac{1}{m}$, $M'=\frac{1}{m'}$，即可得结论，证毕。

推论 1　设在有限维线性空间上定义了两个范数$\|x\|$和$\|x\|_1$，那末必存在常数M和M'，使得

$$M\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant M'\|x\|$$

证　我们记$\|x\|_0=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，其中$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$由定理可知存在正数$k$和$k'$，$L$和$L'$有

$$k\|x\|\leqslant\|x\|_0\leqslant k'\|x\|,$$

$$L\|x\|_1\leqslant\|x\|_0\leqslant L'\|x\|_1,$$

将两式综合起来，令$M=\frac{k}{L'}$, $M'=\frac{k'}{L}$，即得结论．证毕。

定义 2　设R是线性空间，$\|x\|_1$和$\|x\|_2$是R上两个范数，如果存在正数c_1和c_2，使得对一切$x\in R$，成立

$$c_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2,$$

则称范数$\|x\|_1$和$\|x\|_2$是等价的。

对于两个等价的范数$\|x\|_1$，$\|x\|_2$，$\|x_n-x\|_1\to 0$和$\|x_n-x\|_2\to 0$是一致的，因此，我们称$(R,\|x\|_1)$和$(R,\|x\|_2)$这两个赋范空间是拓扑同构的。

推论 2　任何有限维赋范空间都和欧氏空间拓扑同构．相同维数的有限维赋范空间彼此拓扑同构。

证　任何维数为n的有限维赋范空间与R^n拓扑同构，所以一定是完备的，因而是闭的（见§4 定理 1）。

第六章　习　题

1. 设(X,d)为一度量空间，令

$$B(x_0,\varepsilon)=\{x\,|\,x\in X,\,d(x,x_0)<\varepsilon\},$$

$$S(x_0,\varepsilon)=\{x\,|\,x\in X,\,d(x,x_0)\leqslant\varepsilon\},$$

问 $B(x_0,\varepsilon)$ 的闭包是否等于 $s(x_0\varepsilon)$？

2. 设$C^\infty[a,b]$是区间$[a,b]$上无限次可微函数的全体，定义

$$d(f,g)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)|}{1+|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)|}.$$

证明$C^\infty[a,b]$按$d(f,g)$成度量空间.

3. 设B是度量空间X中闭集，证明必有一列开集$O_1,O_2,\cdots,O_n,\cdots$包含$B$，而且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=B.$$

4. 设$d(x,y)$为空间X上的距离，证明

$$\bar{d}(x,y)=\frac{d'(x,y)}{1+d(x,y)}$$

也是X上的距离.

5. 证明题2中点列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$按距离收敛于$f\in C^\infty[a,b]$的充要条件为f_n的各阶导数在$[a,b]$上均匀收敛于f的各阶导数.

6. 设$B\subset[a,b]$，证明度量空间$C[a,b]$中的集

$$\{f\,|\,当\ t\in B\ 时，f(t)=0\}$$

为$C[a,b]$中的闭集，而集

$$A=\{f\,|\,当\ t\in B\ 时，|f(t)|<a\},\quad(a>0)$$

为开集的充要条件是：B为闭集.

7. 设E及F是度量空间中两个集，如果$d(E,F)>0$，证明必有不相交开集O及G分别包含E及F.

8. 设$B[a,b]$表示$[a,b]$上实有界函数全体．对$B[a,b]$中任俩元素$f,g\in B[a,b]$，规定距离为

$$d(f,g)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|.$$

证明$B[a,b]$不是可分空间.

9. 设X是可分距离空间，$\mathscr{F}$为X的一个开覆盖，即$\mathscr{F}$是一族开集，使得对每个$x\in X$，有$\mathscr{F}$中开集O，使$x\in O$，证明必可从$\mathscr{F}$中选出可列个集组成X的

一个覆盖.

10. 设 X 为距离空间, A 为 X 中子集, 令 $f(x)=\inf\limits_{y\in A}d(x,y)$, $x\in X$, 证明 $f(x)$ 是 X 上连续函数.

11. 设 X 为距离空间, F_1, F_2 为 X 中不相交的闭集, 证明存在开集 G_1, G_2, 使得 $G_1\cap G_2=\varnothing$, $G_1\supset F_1$, $G_2\supset F_2$.

12. 设 X, Y, Z, 为三个度量空间, f 是 X 到 Y 中的连续映照, g 是 Y 到 Z 中的连续映照, 证明复合映照 $(gf)(x)=g(f(x))$ 是 X 到 Z 中的连续映照.

13. 设 X 是度量空间, f 是 X 上的实函数, 证明 f 是连续映照的充要条件是对每个实数 C, 集合

$$\{x\,|\,x\in X, f(x)\leqslant C\}\text{和集合}\{x\,|\,x\in X, f(x)\geqslant C\}$$

都是闭集.

14. 证明柯西点列是有界点列.

15. 证明 § 1 中空间 S, $B(A)$, $\mathfrak{M}(X)$ 以及离散空间都是完备的度量空间.

16. 证明 l^∞ 与 $C[0,1]$ 的一个子空间等距同构.

17. 设 F 是 n 维欧几里得空间 R^n 中有界闭集, A 是 F 到自身中的映照, 并且适合下列条件: 对任何 $x, y\in F$, 有

$$d(Ax, Ay)<d(x, y),$$

证明映照 A 在 F 中存在唯一的不动点.

18. 设 X 为完备度量空间, A 是 X 到 X 中映照, 记

$$\alpha_n=\sup_{x\neq x'}\frac{d(A^nx, A^nx')}{d(x, x')}.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$, 则映照 A 有唯一不动点.

19. 设 A 为从完备度量空间 X 到 X 中映照, 若在开球 $B(x_0, r)$ $(r>0)$ 内适合

$$d(Ax, Ax')<\theta d(x, x'),\quad 0<\theta<1.$$

又 A 在闭球 $S(x_0, r)=\{x\,|\,d(x, x_0)\leqslant r\}$ 上连续, 并且

$$d(x_0, Tx_0)\leqslant\theta(1-\theta)r.$$

证明 A 在 $S(x_0, r)$ 中有唯一的不动点.

20. 设 a_{jk}, $j, k=1, 2, \cdots, n$ 为一组实数, 适合条件 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})^2<$

1, 其中 δ_{jk} 当 $j=k$ 时为 1, 否则为 0. 证明代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

对任何一组固定的 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 必有唯一的解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

21. 设 $f(t)\in C[0, 1]$, 求出方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)ds \qquad (t\in[0, 1])$$

的连续解.

22. 设 $V[a, b]$ 表示$[a, b]$上右连续的有界变差函数全体, 其线性运算为通常函数空间中的运算. 在 $V[a, b]$ 中定义范数 $\|x\|=|x(a)|+\bigvee_a^b(x)$, 证明 $V[a, b]$是Banach空间.

23. 设 $X_1, X_2, \cdots$是一列 Banach 空间,

$$x=\{x_1, x_2, \cdots x_n\cdots\}$$

是一列元素, 其中 $x_n\in X_n$, $n=1, 2, \cdots$, 并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$, 这种元素列的全体记成$X$, 类似通常数列的加法和数乘, 在$X$中引入线性运算. 若令

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明当 $p\geqslant 1$ 时, X是 Banach 空间.

24. 设X是线性赋范空间, $X\times X$为两个X的笛卡尔乘积空间, 对每个$(x, y)\in X\times X$, 定义

$$\|(x, y)\|=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2},$$

则$X\times X$成为线性赋范空间. 证明$X\times X$到X的映照: $(x, y)\to x+y$是连续映照.

25. 设Λ是实(复)数域, X为线性赋范空间, 对每个$(\alpha, x)\in\Lambda\times X$, 定义

$$\|(\alpha, x)\|=\sqrt{|\alpha|^2+\|x\|^2}.$$

则 $(\alpha, x)\to\alpha x$ 为 $\Lambda\times X$ 到X中的连续映照.

26. 设C为一切收敛数列所组成的空间, 其中的线性运算与通常序列空间相同. 在C中令$\|x\|=\sup\limits_i|x_i|$, $x=\{x_n\}\in C$, 证明C是可分的 Banach 空间.

第七章　线性有界算子和线性连续泛函

在这一章中，我们将研究从线性赋范空间X到另一个线性赋范空间Y中的映照，亦称算子．如果Y是数域，则称这种算子为泛函．算子和泛函我们并不陌生．例如微分算子$D=\dfrac{d}{dx}$就是从连续可微函数空间$C^1[a,b]$到$C[a,b]$上的算子，而黎曼积分$\int_a^b f(t)dt$就是连续函数空间$C[a,\ b]$上的泛函．如果说函数是数和数之间的对应，那末算子可说是函数和函数之间的对应，不过这是更高一级的对应而已，我们这里主要讨论线性算子和线性泛函，关于非线性算子和非线性泛函的问题已超出本书的范围了．在这一章中，我们只讨论线性算子和线性泛函的一些基本性质，更进一步的一些结果放到第九章中讨论．

§1．线性有界算子和线性连续泛函

I．线性算子和线性泛函的定义

定义1　设X和Y是两个同为实(或复)的线性空间，$\mathscr{D}$是X的线性子空间，T为$\mathscr{D}$到Y中的映照，如果对任何$x,\ y\in\mathscr{D}$，及数α，成立

$$T(x+y)=Tx+Ty, \tag{1}$$

$$T(\alpha x)=\alpha Tx, \tag{2}$$

则称T为$\mathscr{D}$到Y中的线性算子，其中$\mathscr{D}$称为T的定义域，记为$\mathscr{D}(T)$，$T\mathscr{D}$称为T的值域，记为$\mathscr{R}(T)$，当T取值于实(或复)数域

时，就称T为实(或复)线性泛函.

如果T为线性算子，在(2)中取$\alpha=0$，立即可得$T0=0$，即$0\in\mathscr{N}(T)$，其中$\mathscr{N}(T)$表示算子T的零空间

$$\mathscr{N}(T)=\{x;Tx=0,x\in\mathscr{D}(T)\}.$$

下面举一些线性算子和线性泛函的例子

例1 设X是线性空间，α是一给定的数，对任何$x\in X$，令

$$Tx=\alpha x.$$

显然T是X到X中的线性算子，称为相似算子，特别当$\alpha=1$时，称为恒等算子，记为I_X或I，当$\alpha=0$时，称为零算子，记为O.

例2 设$\mathscr{P}[0,1]$为$[0,1]$区间上多项式全体，对每个$x\in\mathscr{P}[0,1]$，定义

$$Tx(t)=\frac{d}{dt}x(t).$$

由求导运算的线性性质，立即可知T是$\mathscr{P}[0,1]$到$\mathscr{P}[0,1]$中的线性算子，称为微分算子. 如果任取$t_0\in[0,1]$，对任何$x\in\mathscr{P}[0,1]$，定义

$$f(x)=x'(t_0),$$

则f是$\mathscr{P}[0,1]$上线性泛函.

例3 对每个$x\in C[a,b]$，定义

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau.$$

由积分的线性性质，可知T是$C[a,b]$到$C[a,b]$中的线性算子. 若令

$$f(x)=\int_a^b x(\tau)d\tau,$$

则f是$C[a,b]$上线性泛函.

例4 对任何$x\in C[a,b]$，令

$$Tx(t)=tx(t).$$

易知T是线性算子，称为乘法算子，它在物理及算子谱论中是非常有用的一种算子.

例 5 设R^n是n维线性空间，在R^n中取一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，则对任何$x \in R^n$, x可以唯一地表示成$x = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu$. 对每一个$n \times n$方阵$(t_{\mu\nu})$，作$R^n$到$R^n$中算子$T$如下：当$x = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu$时，令

$$y = Tx = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu,$$

其中$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\mu\nu} \xi_\nu$, $\mu = 1, 2, \cdots, n$. 显然这样定义的T是线性算子，这个算子在线性代数中称为线性变换. 算子T显然由方阵$(t_{\mu\nu})$唯一确定，有时就记为$T = (t_{\mu\nu})$.

反过来，设T是R^n到R^n中的线性算子，令

$$Te_\nu = t_{1\nu} e_1 + t_{2\nu} e_2 + \cdots + t_{n\nu} e_n, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

则当 $x = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu$ 时，由T的线性可得$Tx = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu e_\mu$，这里$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} t_{\mu\nu} \xi_\nu$，即$T$是对应于方阵$(t_{\mu\nu})$的算子.

由此可知，在有限维空间上，当基选定以后，线性算子与矩阵是相对应的.

设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是一组数，当$x = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu$时，定义

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \xi_\nu.$$

易知f为R^n上线性泛函. 反之，如果f是R^n上线性泛函，记$\alpha_\nu = f(e_\nu)$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$，则当$x = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu$时，由$f$的线性，

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu f(e_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu\alpha_\nu.$$

由此可见 n 维线性空间上线性泛函与数组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$相对应.

II. 线性有界算子和线性连续泛函

定义 2 设X和Y是两个线性赋范空间,T是X的线性子空间$\mathscr{D}(T)$到Y中的线性算子,如果存在常数c,使对所有$x\in\mathscr{D}(T)$,有

$$\|Tx\|\leqslant c\|x\|, \tag{3}$$

则称T是$\mathscr{D}(T)$到Y中的线性有界算子,当$\mathscr{D}(T)=X$时,称T为X到Y中的线性有界算子,简称为有界算子.对于不满足条件(3)的算子,称为无界算子.本书主要讨论有界算子.

线性算子由于具有可加性,所以它的连续性可用有界性来描述.

定理 1 设T是线性赋范空间X到线性赋范空间Y中的线性算子,则T为有界算子的充要条件为T是X上连续算子.

证明 若T有界,由(3)式,当$x_n\to x$时,因为

$$\|Tx_n-Tx\|\leqslant c\|x_n-x\|,$$

所以$\|Tx_n-Tx\|\to 0$,即$Tx_n\to Tx$,因此T连续.

反之,若T在X上连续,但T无界,这时在X中必有一列向量$x_1, x_2, x_3, \cdots$,使$\|x_n\|\neq 0$,但

$$\|Tx_n\|\geqslant n\|x_n\|.$$

令$y_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$, $n=1, 2, \cdots$, 则 $\|y_n\|=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$,所以$y_n\to 0$,由$T$的连续性,得到$Ty_n\to T0=0$,但由于$T$是线性算子,又可以得到对一切自然数$n$,成立

$$\|Ty_n\|=\|T(x_n/n\|x_n\|)\|=\|Tx_n\|/n\|x_n\|\geqslant n\|x_n\|/n\|x_n\|=1,$$

这与$Ty_n\to 0$矛盾,所以T是有界算子,证毕.

对于线性泛函,我们还有下面的定理.

定理 2 设X是线性赋范空间，f是X上线性泛函，那末f是X上连续泛函的充要条件为f的零空间$\mathscr{N}(f)$是X中的闭子空间.

证明 设f是连续线性泛函，当$x_n\in\mathscr{N}(f)$，$n=1,2,\cdots$，并且$x_n\to x$时，由f的连续性，有$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，因此$x\in\mathscr{N}(f)$，所以$\mathscr{N}(f)$是闭集.

反之，若$\mathscr{N}(f)$是闭集，而f无界，则在X中存在一列向量x_n，$\|x_n\|\neq 0$，$n=1,2,\cdots$，使得对每个n，成立

$$|f(x_n)|\geqslant n\|x_n\|,$$

令$y_n=x_n/\|x_n\|$，则$\|y_n\|=1$，且$|f(y_n)|\geqslant n$，作

$$z_n=y_n/f(y_n)-y_1/f(y_1),$$

那末$f(z_n)=0$，因此，$z_n\in\mathscr{N}(f)$，然而由于

$$\|y_n/f(y_n)\|=1/|f(y_n)|\leqslant\frac{1}{n}\to 0,\ (n\to\infty)$$

所以 $z_n\to -y_1/f(y_1)$，但$f(-y_1/f(y_1))=-1$，即$-y_1/f(y_1)\overline{\in}\mathscr{N}(f)$，这与$\mathscr{N}(f)$是闭集的条件矛盾，因此$f$是线性有界泛函. 证毕.

我们最感兴趣的是使(3)式对一切$x\in\mathscr{D}(T)$成立的"最小"的数c，为此引入下面的基本概念，

定义 3 设T为线性空间X的子空间$\mathscr{D}(T)$到线性赋范空间Y中的线性算子，称

$$\|T\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in\mathscr{D}(T)}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\tag{4}$$

为算子T在$\mathscr{D}(T)$上的范数.

显然若T是$\mathscr{D}(T)$上线性有界算子，则$\|T\|$是一有限数，反之，当$\|T\|<\infty$时，由T的线性，则有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|,\quad x\in\mathscr{D}(T).\tag{5}$$

引理 1 设T是$\mathscr{D}(T)$上线性有界算子，那末成立

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|=1}}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\| \tag{6}$$

证明 因为

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\|Tx\|/\|x\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\left\|\frac{Tx}{\|x\|}\right\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ x\neq 0}}\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$$

令 $y=\frac{x}{\|x\|}$, 则$\|y\|=1$, 且 $y\in\mathscr{D}(T)$, 所以

$$\|T\| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|=1}}\|Tx\| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\|. \tag{7}$$

反之, 若 $x\in\mathscr{D}(T)$, $\|x\|\leqslant 1$, 则由(5)

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\| \leqslant \|T\|,$$

所以

$$\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|\leqslant 1}}\|Tx\| \leqslant \|T\|. \tag{8}$$

由(7)和(8)式, 得知(6)式成立, 证毕.

III. 线性有界算子和线性连续泛函的例子

例 6 线性赋范空间X上的相似算子 $Tx=\alpha x$ 是线性有界算子, 且$\|T\|=|\alpha|$, 特别$\|I_X\|=1$, $\|O\|=0$.

例 7 设 $X=C[0, 1]$, $K(t, \tau)$是矩形$[0, 1]\times[0, 1]$上的二元连续函数, 对每个 $x\in C[0, 1]$, 定义

$$Tx(t)=\int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d\tau.$$

易知T是 $C[0, 1]$到 $C[0, 1]$中的线性算子, 这个算子称为积分算子, 其中函数 $K(t, \tau)$称为T的核, 又因为

$$|x(t)| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)| = \|x\|,$$

所以

$$\|Tx\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1 K(t, \tau)x(\tau)d\tau\right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K(t, \tau)||x(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |K(t,\tau)|d\tau\cdot\|x\|.$$

因此T是有界算子，可以证明此时$\|T\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1|K(t,\tau)|d\tau$.

例 8 对任何$f\in L^1[a,b]$，作

$$Tf(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau,$$

则T为$L^1[a,b]$到$L^1[a,b]$中的线性算子，又因为

$$\|Tf\|_1=\int_a^b\left|\int_a^t f(\tau)d\tau\right|dt\leqslant\int_a^b\int_a^t|f(\tau)|d\tau dt$$

$$\leqslant\int_a^b|f(\tau)|d\tau\cdot\int_a^b 1\,dt=(b-a)\|f\|_1,$$

所以$\|T\|\leqslant b-a$. 另一方面，对任何使$a+\dfrac{1}{n}<b$的自然数n，作函数

$$f_n(t)=\begin{cases}n, & t\in\left[a,a+\dfrac{1}{n}\right]\\ 0, & t\in\left(a+\dfrac{1}{n},b\right]\end{cases}$$

容易知道此时$\|f_n\|_1=1$，而且

$$\|Tf_n\|_1=\int_a^b\left|\int_a^t f_n(\tau)d\tau\right|dt=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(t-a)dt+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\,dt$$

$$=(b-a)-\frac{1}{2n},$$

所以$\|T\|\geqslant\sup\limits_n\|Tf_n\|_1=b-a$，从而$\|T\|=b-a$.

最后举一个无界算子的例子.

例 9 考察例 2 中的微分算子$Tx(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)$，若视$\mathscr{D}[0,1]$为$C[0,1]$的子空间，令$x_n(t)=t^n$，则$\|x_n\|=1$，但$\|Tx_n\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}|=n$，所以$\|T\|\geqslant\|Tx_n\|=n$，即$T$是无界算子.

§2 线性算子空间和共轭空间

在这一节中，我们讨论线性赋范空间上线性有界算子全体和线性连续泛函全体所成的空间.

I. 线性有界算子全体所成空间

设X和Y是两个线性赋范空间，我们以$\mathscr{B}(X\to Y)$表示由X到Y中线性有界算子全体. 当A和B属于$\mathscr{B}(X\to Y)$, α是所讨论数域中的数时, 定义$\mathscr{B}(X\to Y)$中加法运算及数乘运算如下：对任何$x\in X$, 令

$$(A+B)x=Ax+Bx,$$

$$(\alpha A)x=\alpha Ax.$$

下面证明$\mathscr{B}(X\to Y)$按上述线性运算及算子范数成为线性赋范空间. 事实上，如果 $A, B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，则对任何$x\in X$，由算子加法定义，

$$\|(A+B)x\|=\|Ax+Bx\|\leqslant\|Ax\|+\|Bx\|\leqslant\|A\|\|x\|+\|B\|\|x\|$$
$$=(\|A\|+\|B\|)\|x\|.$$

由于A及B是有界算子, 所以$\|A\|+\|B\|<\infty$，由此可知$A+B\in\mathscr{B}(X\to Y)$, 并且成立不等式

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|. \tag{1}$$

又对任何数α, 显然有

$$\|\alpha A\|=\sup_{\|x\|=1}\|(\alpha A)x\|=\sup_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\|=|\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|=|\alpha|\ \|A\|,$$

由此得到$\alpha A\in\mathscr{B}(X\to Y)$, 且$\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$. 最后$\|A\|=0$的充要条件为对于任何$x\in X$, $Ax=0$, 即$A=0$. 因此$\mathscr{B}(X\to Y)$按上述加法及数乘运算和算子范数成为线性赋范空间.

定理1 **当Y是Banach空间时，$\mathscr{B}(X\to Y)$也是Banach空间.**

证明 设$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$为$\mathscr{B}(X\to Y)$中的柯西点列，则由柯西点列

定义，对任何正数 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n, m>N$ 时，

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon,$$

于是对每个 $x\in X$，当 $n, m>N$ 时，成立

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|<\varepsilon\|x\|, \tag{2}$$

所以当 x 固定时，点列 $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的柯西点列，由 Y 的完备性，存在 $y\in Y$，使 $T_nx\to y,(n\to\infty)$. 作 X 到 Y 中算子 T 如下：对每个 $x\in X$，令

$$Tx=y=\lim_{n\to\infty}T_nx,$$

容易知道 T 是 X 到 Y 中的线性算子. 在(2)中，令 $m\to\infty$，由范数连续性，得到：当 $n>N$ 时，对 X 中所有 x 成立

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|,$$

由于 ε 不依赖于 x，所以

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon \tag{3}$$

即 $T_n-T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，又因 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是线性空间，所以

$$T=T_n+(T-T_n)\in\mathscr{B}(X\to Y),$$

并由(3)，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，这就证明了 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间，证毕.

设 $A\in\mathscr{B}(Z\to Y)$，$B\in\mathscr{B}(X\to Z)$，令

$$(AB)x=A(Bx),\quad x\in X$$

显然 AB 是线性算子，称为 B 与 A 的乘积. 又对每个 $x\in X$，因为

$$\|(AB)x\|=\|A(Bx)\|\leqslant\|A\|\ \|Bx\|\leqslant\|A\|\ \|B\|\ \|x\|,$$

所以 $\|AB\|\leqslant\|A\|\ \|B\|<\infty$，即 $AB\in\mathscr{B}(X\to Y)$.

一般，设 X 是线性赋范空间，如果在 X 中定义了两个向量的乘积，并且满足

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\ \|y\|,\quad x, y\in X,$$

则称 X 是赋范代数，当 X 完备时，则称 X 为 Banach 代数. 由定理 1 知 $\mathscr{B}(X\to X)$ 当 X 完备时是 Banach 代数.

II. 共轭空间

定义 1 设 X 是线性赋范空间，令 X' 表示 X 上线性连续泛函全体所成的空间，称为 X 的共轭空间.

由于实数体和复数体是完备空间，所以由定理 1 立即可得

定理 2 任何线性赋范空间的共轭空间是 Banach 空间.

在泛函分析一般理论的应用中，知道一些具体空间的共轭空间的一般形式往往是十分有用的. 下面作为例子给出空间 l^1 和 l^p 共轭空间的一般形式.

首先引入两个线性赋范空间同构的概念.

定义 2 设 X 和 Y 是两个线性赋范空间，T 是 X 到 Y 中的线性算子，并且对所有 $x\in X$，有

$$\|Tx\|=\|x\|,$$

则称 T 是 X 到 Y 中的保距算子，如果 T 又是映照到 Y 上的，则称 T 是同构映照，此时称 X 与 Y 同构.

显然保距算子是一对一的，而同构映照是等距映照，由于同构映照保持线性运算及范数不变，所以撇开 X 和 Y 中点的具体内容，可以将 X 及 Y 看成同一抽象空间而不加以区别，在这个意义下，可以认为 $X=Y$.

例 1 l^1 的共轭空间为 l^∞，即 $(l^1)'=l^\infty$.

证明 令 $e_n=(\delta_{n1},\delta_{n2},\delta_{n3},\cdots)$，$n=1,2,\cdots$，其中 δ_{nj} 当 $j=n$ 时等于 1，当 $j\neq n$ 时等于 0，显然 $e_n\in l^1$ 并且对每个 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^1$，有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k.$$

设 $f\in(l^1)'$，令 $f(e_n)=\eta_n$，$n=1,2,\cdots$，那末由于 $f\in(l^1)'$，因而有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k, \tag{4}$$

又因为$\|e_k\|_1=1$，所以对一切自然数 k，有

$$|\eta_k|=|f(e_k)|\leqslant\|f\|\|e_k\|_1=\|f\|.$$

由此可得

$$\sup|\eta_k|\leqslant\|f\|, \tag{5}$$

即$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots)\in l^\infty$. 反之，对每个 $b=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots)\in l^\infty$，作 l^1 上泛函 $g(x)$如下：

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^1,$$

显然 g 是 l^1 上线性泛函，又因

$$|g(x)|=|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\ |\beta_k|\leqslant\sup_k|\beta_k|\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|$$

$$=\sup_k|\beta_k|\|x\|_1.$$

因此 $g\in(l^1)'$，并且有

$$\|g\|\leqslant\sup_j|\beta_j|=\|b\|_\infty. \tag{6}$$

因此(4)式是 l^1 上线性连续泛函的一般形式. 作 $(l^1)'$ 到 l^∞ 中映照T如下：

$$Tf=(f(e_1),f(e_2),f(e_3),\cdots),\quad f\in(l^1)',$$

显然T是线性映照，且由前证明知T是到上的. 由(5)式，

$$\|Tf\|_\infty=\sup_k|f(e_k)|\leqslant\|f\|,$$

又由(4)式，对每个 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^1$，有 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)$，

所以由(6)式，成立

$$\|f\|\leqslant\sup_k|f(e_k)|=\|Tf\|_\infty,$$

于是$\|f\|=\|Tf\|_\infty$，即T是$(l^1)'$到l^∞上的同构映照，所以$(l^1)'=l^\infty$，证毕.

例 2 $l^p(1<p<+\infty)$的共轭空间为l^q，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明 仍令$e_n=(\delta_{n1},\delta_{n2},\delta_{n3},\cdots)$，$n=1,2,\cdots$，显然$e_n\in l^p$，且$\|e_n\|_p=1$，易知对每个$x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^p$，成立

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k.$$

设$f\in(l^p)'$，令$f(e_k)=\eta_k$，那末由于f是线性连续泛函，所以

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k. \tag{7}$$

若$f=0$，则$\eta_k=0$，$k=1,2,\cdots$，所以不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\| \tag{8}$$

自然成立，若$f\neq0$，则η_k不全为0，对任何自然数n，令$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\xi_3^{(n)},\cdots)$，其中

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|\eta_k|^q/\eta_k, & \text{当 } k\leqslant n,\ \eta_k\neq0\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } k>n\text{ 或 }\eta_k=0\text{ 时},\end{cases}$$

显然$x_n\in l^p$，因为$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\eta_k=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q$，另一方面又有

$$\begin{aligned}f(x_n)\leqslant\|f\|\|x_n\|&=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

因为 η_k 不全为 0，所以当 n 足够大时，$\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}\neq 0$，在上面不等式两边同除以$\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$，得到

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=f(x_n)\bigg/\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|,$$

令 $n\to\infty$，由 $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$，我们得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|. \tag{9}$$

因此$(\eta_1,\eta_2,\eta_3\cdots)\in l^q$. 反之，对任何 $b=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots)\in l^q$，若 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^p$，则令

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\beta_k.$$

易知 g 是 l^p 上线性泛函，并且由 Hölder 不等式，可以得到

$$\begin{aligned}|g(x)|&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\beta_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\|x\|_p\|b\|_q,\end{aligned}$$

所以

$$\|g\|\leqslant\|b\|_q, \tag{10}$$

类似于 l^1，作$(l^p)'$ 到 l^q 中的映照T如下：

$$Tf=(f(e_1),f(e_2),f(e_3),\cdots)\in l^q,\quad f\in(l^p)',$$

显然T是线性映照，由T的定义及前面证明知T是一对一到上的。由(9)式

$$\|Tf\|_q=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|f(e_k)|^q\right]^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,$$

另一方面，对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3\cdots)\in l^p$. 成立

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k),$$

由(10)式知

$$\|f\|\leqslant\|\{f(e_k)\}\|_q=\|Tf\|_q,$$

因此，T 是 $(l^p)'$ 到 l^q 上的同构映照，所以 $(l^p)'=l^q$，证毕.

§3. 广义函数大意

自然科学的发展表明，古典的函数概念是不够用的，或者是不完全适合的. 于是，广义函数论随之兴起. 广义函数包括通常的函数在内，然而更广. 它允许无限多次可导和自由地进行极限交换. 这一节我们介绍广义函数的大意①.

我们先来介绍工程技术中常用的 δ 函数. 设想在无限长细棒上有一质量分布，只集中在一点 $x=0$ 处，总质量为 1 个单位. 这意思是说，有一假想的密度函数 $\delta(x)$，当 $x\neq 0$ 时，$\delta(x)=0$，在 $x=0$ 处，密度为无限大，而密度函数的积分为总质量 1：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$. 这种假想的函数，已超出了通常的函数概念的框架. 试想，一个仅在一点不为 0 的函数，是几乎处处为零的，其积分应当是 0，怎么可能是 1 呢？这类 $\delta(x)$ 在工程里常常遇到，例如无线电工程中考察脉冲，在极短的一个时间内爆发出一个单位能量的信号，和上述质量分布的类型相似.

从 $\delta(x)$ 的性质，还可以形式地认为，对一切连续函数 $\varphi(x)$ 应有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$，这可由下式看出：

① 严格的证明可参考有关专著，亦可见夏道行等编《实变函数与泛函分析》（下册）有关章节，人民教育出版社，1979 年.

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(x)-\varphi(0))\delta(x)dx\right|=\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\varphi(x)-\varphi(0))\delta(x)dx\right|$$

$$\leqslant\max_{|x|\leqslant\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)dx=\max_{|x|\leqslant\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\to 0,$$

$$\varepsilon\to 0.$$

请读者注意，因为 $\delta(x)$是假想函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx$ 的意义尚不清楚，上面的推论只是形式上的说明和假想的推论，不能算作定义．我们下面的任务是要给广义函数(包括这种$\delta(x)$)给予一种严格的数学定义．它的基本思想是：由$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$，可以认为$\delta(x)$是连续函数空间上的线性连续泛函．这启发我们，如果把连续函数空间进一步缩小，收敛性进一步加强，那么在这个空间上的线性连续泛函一定更多，我们不妨把它们就称做广义函数.

定义 1 （基本空间） 设$\mathscr{D}$是$-\infty<x<+\infty$上无限次可微且在某有限区间以外为 0 的函数全体．按照通常的加法和数乘，它成为线性空间，在其中定义极限概念如下：设 $\varphi_n\in\mathscr{D}$，$\varphi\in\mathscr{D}$，若

(1) 存在一个与 n 无关的公共有限区间$[a,b]$，使 φ_n 在$[a,b]$外为 0；

(2) 在$-\infty<x<+\infty$ 上，对每一非负整数 q，$\varphi_n^{(q)}(x)$一致收敛于 $\varphi^{(q)}(x)$，

则称 φ_n 在$\mathscr{D}$中收敛于 φ，记为 $\varphi_n\underset{\mathscr{D}}{\to}\varphi$．$\mathscr{D}$ 称为基本空间.

空间$\mathscr{D}$的这种收敛性不能容纳在距离空间的收敛性之中，即我们无法定义一个距离 ρ，使 $\varphi_n\underset{\mathscr{D}}{\to}\varphi$ 等价于 $\rho(\varphi_n,\varphi)\to 0$.

定义 2 （广义函数） $\mathscr{D}$ 上的线性连续泛函数 f 称为广义函数．记为(f,φ)，或 $f(\varphi)$，或简记为 f.

例 1 局部可积函数是广义函数.

我们把在任何有限区间上都 L 可积的函数称为局部可积函

数，其全体记为 L^*. 设 $f(x)\in L^*$，则可用 f 定义一个 $\mathscr{D}$ 上的线性连续泛函 $T(f)$：对任何 $\varphi\in\mathscr{D}$，对应 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$，由于 $\varphi(x)$ 在某有限区间外为 0，故上述积分有意义．它显然是 $\mathscr{D}$ 上线性连续泛函．我们还可以证明，L^* 对应广义函数是一对一的，即如果 $f\in L^*$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx=0$ 对一切 $\varphi\in\mathscr{D}$ 成立，则 $f(x)=0$, a.e.. 这样，局部可积函数就可以一对一地嵌入 $\mathscr{D}$ 上线性连续泛函空间，作为它的一部分，即是广义函数．

例 2 $\delta(x)$

现在我们可以给本节开始时引进的 $\delta(x)$ 一个严格的数学定义．如果 $\mathscr{D}$ 上的线性连续泛函由下式给定：对一切 $\varphi\in\mathscr{D}$，对应数值 $\varphi(0)$，称这一泛函为 δ，换句话说，对一切 $\varphi\in\mathscr{D}$，有

$$\delta(\varphi)=\varphi(0).$$

这一定义正是 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0)$ 的严格化．

$\delta(\varphi)$ 为 $\mathscr{D}$ 上线性连续泛函是不难验证的：$\delta(\alpha\varphi+\beta\psi)=(\alpha\varphi+\beta\psi)(0)=\alpha\varphi(0)+\beta\psi(0)=\alpha\delta(\varphi)+\beta\delta(\psi)$；当 $\varphi_n\xrightarrow[\mathscr{D}]{}\varphi$ 时，这意味着在任何有限区间上各阶导数一致收敛，当然更有 $\varphi_n(0)\to\varphi(0)$，即 $\delta(\varphi_n)\to\delta(\varphi)$

这样一来，我们确实得到了一个新的概念，它包含通常的局部 L 可积函数在内，又包含超出通常函数概念的 $\delta(x)$ 在内．

最后，让我们介绍广义函数的导数．按照分部积分法，对通常的一阶连续可导函数 $f(x)$, $\varphi\in\mathscr{D}$, φ 在 $[a,b]$ 外为 0，则有：

$$(f',\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)dx=f(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)dx$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)dx=-(f,\varphi').$$

于是受此启发可定义广义函数 F 的导数 F' 为下述的广义函数：

$$(F',\varphi)=-(F,\varphi').$$

由于φ是无限次可微的，(F,φ')有意义，而且$\varphi_n \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \varphi$意味着各阶导数都一致收敛于$\varphi$的相应导数，自然也有$\varphi'_n \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \varphi'$，所以由$(F,\varphi)$是线性连续泛函知$(F',\varphi)$也是线性连续泛函，同样可定义二阶以至任意阶的导数．这样一来，基本空间中函数的优良性质就能够转移到广义函数上了．

例 3 设$\theta(x)$在$x<0$时为0，在$x\geqslant 0$时恒为1，这时$\theta(x)\in L^*$，$\theta(x)$作为广义函数有导数$\delta(x)$，这是因为

$$(\theta'(x),\varphi)=-(\theta(x),\varphi')=-\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\varphi'(x)dx$$
$$=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)dx=\varphi(0).$$

同样可验证$(\delta'(x),\varphi)=-(\delta,\varphi')=-\varphi'(0)$．

假若我们定义$F_n\to F$为$(F_n,\varphi)\to(F,\varphi)$对一切$\varphi\in\mathscr{D}$成立，那么微分运算和极限运算的交换就是显然的：

$$\lim_{n\to\infty}(F'_n,\varphi)=\lim_{n\to\infty}-(F_n,\varphi')=-\lim_{n\to\infty}(F_n,\varphi')=-(F,\varphi')$$
$$=(F',\varphi)=((\lim_{n\to\infty}F_n)',\varphi).$$

广义函数的优越性由此可见一斑．

第七章　习　题

1．举例说明线性有界算子的值域不一定是闭线性子空间．

2．求$C[-1,1]$上线性泛函

$$f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)dt-\int_0^1 x(t)dt$$

的范数．

3．设无穷阵(a_{ij}) $i,j=1,2,\cdots$，满足$\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$．作$l^\infty$到$l^\infty$中算子如下：若

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots), y=(\eta_1, \eta_2, \cdots), Tx=y, \text{则}$$

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j, i=1, 2, \cdots,$$

证明 $\quad \|T\|=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|.$

4. 设 $\sup_{n\geq 1}|\alpha_n|<\infty$, 在 $l^p(p\geq 1)$ 中定义线性算子:

$$y=Tx, \eta_i=\alpha_i\xi_i, \quad i=1, 2, \cdots,$$

其中 $\quad x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots), y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots),$

证明 T 是线性有界算子, 并且 $\|T\|=\sup_{n\geq 1}|\alpha_n|$.

5. 设 X 是 n 维向量空间, 在 X 中取一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $(t_{\mu\nu})$ 是 $n\times n$ 的矩阵, 作 X 到 X 中算子如下: 当 $x=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu$ 时, $y=Tx=\sum_{\mu=1}^{n}y_\mu e_\mu$, 其中 $y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n}t_{\mu\nu}x_\nu, \mu=1, 2, \cdots, n$. 若规定向量的范数为 $\|x\|=\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 证明上述算子的范数满足

$$\max_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\leqslant\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设 T 是 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的积分算子:

$$(T\varphi)(s)=\int_a^b k(s, t)\varphi(t)dt, \qquad \varphi\in C[a, b],$$

其中 $k(s, t)$ 是 $[a, b]\times[a, b]$ 上二元连续函数, 证明

$$\|T\|=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b|k(s, t)|dt.$$

7. 设 T 是线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的线性算子, 若 T 的零空间是闭集, T 是否一定有界?

8. 作 $l^p(1<p<+\infty)$ 中算子 T 如下: 当

$$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^p \text{ 时}, \ Tx=(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots),$$

其中 $y_n=\sum_{m=1}^{\infty}t_{nm}x_m, n=1, 2, 3, \cdots$, $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|t_{nm}|^q\right)^{p/q}<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 证明, T 是线性有界算子.

9. R^n按范数$\|x\|=\max\limits_j|\xi_j|$, $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots\xi_n)$成线性赋范空间，问 R^n的共轭空间是什么?

10. 设 C_0 表示极限为 0 的实数列全体，按通常的加法和数乘，以及 $\|x\|=\sup\limits_i|\xi_i|$, $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$构成 Banach 空间，证$(C_0)'=l^1$.

第八章　内积空间和希尔伯特(Hilbert)空间

在这一章中，我们专门讨论一类特殊的线性赋范空间——内积空间，在这类空间中可以引入正交的概念以及投影的概念，从而可以在内积空间中建立起相应的几何学．在这一章中，我们还要讨论 Hilbert 空间上的 Fourier 分析及它上面的算子，特别是酉算子，自伴算子和正常算子的一些初步性质．

§1．内积空间的基本概念

在复欧氏空间中，向量除了有长度的概念外，还定义了两个向量的内积的运算，即若

$$a=(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n),\ b=(\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_n),$$

则 a 与 b 的内积定义为：

$$\langle a,b\rangle=\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2+\cdots+\xi_n\bar{\eta}_n, \tag{1}$$

其中 $\bar{\eta}_i$ 表示 η_i 的复共轭，并且内积与向量 a 的长度有以下关系

$$\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}.$$

由内积定义，可知两个向量 a 与 b 正交等价于 $\langle a,b\rangle=0$．显然，在有限维复欧氏空间 E^n 中，由(1)定义的内积具有下述性质：

1° $\langle a,a\rangle\geqslant0$，且 $\langle a,a\rangle=0$ 等价于 $a=0$；

2° $\langle\alpha a+\beta b,c\rangle=\alpha\langle a,c\rangle+\beta\langle b,c\rangle$，其中 $a,b,c\in E^n$，α,β 为复数；

3° $\langle a,b\rangle=\overline{\langle b,a\rangle}$，$a,b\in E^n$．

在复欧氏空间 E^n 的欧几里得几何学中所用到内积的性质主要是

上面三条，因此利用这三条性质，我们也在一般的线性空间中引入内积的概念.

定义 1 设 X 是复线性空间，如果对 X 中任何两个向量 x, y，有一复数 $\langle x, y\rangle$ 与之对应，并且满足下列条件：

1° $\langle x, x\rangle \geqslant 0$，且 $\langle x, x\rangle = 0$ 等价于 $x=0, x\in X$；

2° $\langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, x, y, z\in X, \alpha, \beta$ 为复数；

3° $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, x, y\in X$，

则称 $\langle x, y\rangle$ 为 x 与 y 的内积，X 称为内积空间.

如果 X 是实的线性空间，则条件 3° 就改为

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle.$$

从内积的定义，立即可以得到下面的等式

$$\langle x, \alpha y+\beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle. \tag{2}$$

设 X 是内积空间，令

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \tag{3}$$

那末 $\|x\|$ 是 X 上的范数，事实上，由内积定义及(2)式，不难证明

(a) $\|x\| \geqslant 0$，且 $\|x\| = 0$ 等价于 $x=0$；

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.

为了证明范数不等式 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，我们首先证明许瓦兹(Schwarz)不等式：

引理 1 （Schwarz 不等式）设 X 按内积 $\langle x, y\rangle$ 成为内积空间，则对于 X 中任意向量 x, y，成立不等式

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{4}$$

当且仅当 x 与 y 线性相关时，不等式(4)中等号才成立.

证明 如果 $y=0$，易知对一切 $x\in X$，$\langle x, 0\rangle = 0$，因而(4)式成立. 若 $y\neq 0$，则对每个复数 α，由内积条件 1°，有

$$0\leqslant \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha[\langle y, x\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle].$$

令 $\bar{\alpha} = \langle y, x\rangle / \langle y, y\rangle$，那末上式方括号中式子为 0，所以

$$0\leqslant\langle x,x\rangle-\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle=\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

两边乘以$\|y\|^2$，并且开方，即可得到要证的 Schwarz 不等式

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

若x与y线性相关，通过直接计算，易知(4)式中等号成立，反之，若(4)式中等号成立，假定$y=0$，则x与y自然线性相关，若$y\neq0$，令

$$\alpha=\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle},$$

由 Schwarz 不等式推导过程，易知$\|x-\alpha y\|^2=0$，即$x=\alpha y$，所以x与y线性相关，证毕.

由 Schwarz 不等式，立即可知$\|x\|$满足范数不等式，事实上

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

所以$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. 称由(3)式定义的范数$\|x\|$为由内积导出的范数，所以内积空间是一种特殊的赋范空间. 若X按(3)式中范数完备，则称为 Hilbert 空间.

设$\|x\|$是由内积导出的范数，通过计算，读者不难证明对X中任何两个向量$x,y\in X$，成立平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).\tag{5}$$

它是平面上平行四边形公式在内积空间中的推广，反之可以证明，若X是线性赋范空间，其中范数$\|x\|$对X中任何向量$x,y\in X$，满足平行四边形公式(5)，那末一定可在X中定义内积$\langle x,y\rangle$，使$\|x\|$就是由内积$\langle x,y\rangle$导出的范数，证明因限于篇幅而略去. 因此，(5)式是内积空间中范数的特征性质.

下面举一些内积空间的例子

例 1 $L^2[a,b]$，对$L^2[a,b]$中任意向量x,y，定义

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{6}$$

易知 $L^2[a, b]$按(6)中内积成为内积空间，又由内积(6)导出的范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

即为第六章 §8 例 4 中所定义的范数，由第六章 §8 定理 2 知，$L^2[a, b]$成为 Hilbert 空间.

例 2 l^2，设 $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \cdots)$，定义

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i, \tag{7}$$

则 l^2 按(7)中内积也成为 Hilbert 空间.

例 3 当 $p\neq 2$ 时，l^p 不成为内积空间，

事实上，令 $x=(1, 1, 0, \cdots)$，$y=(1, -1, 0, \cdots)$，则 $x\in l^p$，$y\in l^p$，且 $\|x\|=\|y\|=2^{\frac{1}{p}}$，但$\|x+y\|=\|x-y\|=2$，所以不满足平行四边形公式(5)，这说明 $l^p(p\neq 2)$中范数不能由内积导出，因而不是内积空间.

例 4 $C[a, b]$按$\|x\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|$不成为内积空间.

事实上，令 $x(t)\equiv 1$，$y(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$，则 x，$y\in C[a, b]$，且$\|x\|=\|y\|=1$，但因为

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a},$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a},$$

所以$\|x+y\|=2$，$\|x-y\|=1$，因此不满足平形四边形公式，这就证明了$C[a, b]$不是内积空间.

设 X 为内积空间，由(3)给出了 X 上的范数，反之，通过直接计算，读者不难证明，内积与范数之间成立如下等式

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2). \quad (8)$$

(8)式称为极化恒等式，它表示内积可以用范数来表示，当 X 为实内积空间时，极化恒等式变为

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2). \quad (9)$$

由 Schwarz 不等式，立即可知内积是两个变元的连续函数，即当 $x_n\to x, y_n\to y$ 时，有 $\langle x_n, y_n\rangle\to\langle x, y\rangle$，事实上，因为

$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle-\langle x_n, y_n\rangle| &\leqslant |\langle x, y-y_n\rangle|+|\langle x-x_n, y_n\rangle| \\ &\leqslant \|x\|\cdot\|y-y_n\|+\|x-x_n\|\|y_n\|\end{aligned}$$

因 y_n 收敛，故 $\|y_n\|$ 有界，所以当 $n\to\infty$ 时，上面不等式右端趋于 0，因而 $\langle x_n, y_n\rangle\to\langle x, y\rangle$。

§2. 投影定理

设 X 是度量空间，M 是 X 的非空子集，x 是 X 中一点，称

$$\inf_{y\in M} d(x, y)$$

为点 x 到 M 的距离，记为 $d(x, M)$. 在线性赋范空间中，

$$d(x, M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|. \quad (1)$$

在许多数学问题中（例如函数逼近论）常常会提出这样的问题：是否存在 $y\in M$，使

$$d(x, M)=\|x-y\|? \quad (2)$$

如果存在这样的 y，是否唯一？容易明白，如果不对 M 加上一些限制，即使在有限维欧氏空间中，对这个问题的回答也是不肯定的。但当 M 是内积空间中的完备凸子集时，对这个问题可以得到肯定的回答，为此，先介绍凸集的概念。

设 X 是线性空间, x, y 是 X 中两点, 称集合

$$\{z=\alpha x+(1-\alpha)y; 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

为 X 中联结点 x 和 y 的线段, 记为 $[x, y]$. 如果 M 是 X 的子集, 对 M 中的任何两点 x, y, 必有 $[x, y]\subset M$, 则称 M 为 X 中的凸集.

定理 1 (极小化向量定理) **设 X 是内积空间, M 是 X 中非空凸集, 并且按 X 中由内积导出的距离完备, 那末对每个 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in M$, 使得**

$$\|x-y\|=d(x, M). \tag{3}$$

证明 令 $\delta=d(x, M)$, 由下确界定义, 存在 $y_n\in M$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 使

$$\delta_n=\|x-y_n\|\to\delta. \ (n\to\infty) \tag{4}$$

令 $v_n=y_n-x$, 则 $\|v_n\|=\delta_n$, 且

$$\|v_n+v_m\|=\|y_n+y_m-2x\|=2\left\|\frac{1}{2}(y_n+y_m)-x\right\|,$$

因为 M 是凸集, 所以 $\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in M$, 由此可得 $\|v_n+v_m\|\geqslant 2\delta$. 又因为 $y_n-y_m=v_n-v_m$, 由平行四边形公式, 有

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2=\|v_n-v_m\|^2&=-\|v_n+v_m\|^2+2(\|v_n\|^2+\|v_m\|^2)\\&\leqslant-(2\delta)^2+2(\delta_n^2+\delta_m^2),\end{aligned}$$

由(4)式, 知 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 M 中柯西点列, 但 M 按内积导出的距离完备, 因而存在 $y\in M$, 使 $y_n\to y$, 因为 $y\in M$, 所以, $\|x-y\|\geqslant\delta$, 但是

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y_n\|+\|y-y_n\|=\delta_n+\|y_n-y\|.$$

上面不等式右端当 $n\to\infty$ 时, 极限为 δ, 所以得到 $\|x-y\|=\delta$.

若又有 $y_0\in M$, 使得 $\|x-y_0\|=\delta$, 由平行四边形公式,

$$\begin{aligned}\|y-y_0\|^2&=\|(y-x)-(y_0-x)\|^2\\&=2\|y-x\|^2+2\|y_0-x\|^2-\|(y-x)+(y_0-x)\|^2\\&=2\delta^2+2\delta^2-4\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2.\end{aligned}$$

由M的凸性，$\frac{1}{2}(y+y_0)\in M$，所以$\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2\geqslant\delta^2$，因此

$$0\leqslant\|y-y_0\|^2\leqslant 4\delta^2-4\delta^2=0.$$

因而$\|y-y_0\|=0$，即$y=y_0$，这就证明了唯一性，证毕.

当M是X的完备子空间时，M当然是X中的凸集，所以由定理1，立即可以得到下面的推论.

推论 1 **设X是内积空间，M是X的完备子空间，则对每个$x\in M$，存在唯一的$y\in M$，使**

$$\|x-y\|=d(x,M).$$

极小化向量定理是内积空间的一个基本定理，它在微分方程，现代控制论和逼近论中有重要应用.

下面引入内积空间中向量正交的概念.

定义 1 设X是内积空间，x, y是X中两个向量，如果

$$\langle x,y\rangle=0,$$

则称x与y互相垂直或正交，记为$x\perp y$. 如果X的子集A中每个向量都与子集B中每个向量正交，则称A与B正交，记为$A\perp B$，特别当A只含有一点x时，则称x与B正交，记为$x\perp B$.

容易知道，对X中两个互相正交的向量x和y成立勾股公式

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

有了向量正交的概念，类似于有限维欧几里得空间，就可以在一般的内积空间中建立起相应的几何学.

引理 1 **设X是内积空间，M是X的线性子空间，$x\in X$，若存在$y\in M$，使得$\|x-y\|=d(x,M)$，那么，$x-y\perp M$.**

证明 令$z=x-y$，若z不垂直于M，那么必有$y_1\in M$，使得

$$\langle z,y_1\rangle\neq 0. \tag{5}$$

显然$y_1\neq 0$，另一方面，对任何复数α，有

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\langle z-\alpha y_1, z-\alpha y_1\rangle$$

$$=\langle z,z\rangle-\bar{\alpha}\langle z,y_1\rangle-\alpha[\langle y_1,z\rangle-\bar{\alpha}\langle y_1,y_1\rangle],$$

令 $\bar{\alpha}=\dfrac{\langle y_1,z\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}$，则上式右端方括号中式子为0，又因$\|z\|=d(x, M)$，因此

$$\|z-\alpha y_1\|^2=\|z\|^2-\frac{|\langle z,y_1\rangle|^2}{\langle y_1,y_1\rangle}<d^2(x,M),$$

但是由于 $y+\alpha y_1\in M$, 所以

$$\|z-\alpha y_1\|=\|x-y-\alpha y_1\|\geqslant d(x,M),$$

这与$\|z-\alpha y_1\|<d(x,M)$矛盾，因此，$x-y\perp M$，证毕.

设X是线性空间，Y和Z是X的两个子空间，如果对每个$x\in X$，存在唯一的$y\in Y$和$z\in Z$，使$x=y+z$，则称X是Y和Z的直接和，记为$X=Y\dotplus Z$，其中Y和Z称为X的一对互补子空间. Z(或Y)称为$Y(Z)$的代数补子空间. 易知互补子空间必线性无关，即对任何$y\in Y$及$z\in Z$，则y,z线性无关. 例如，$X=R^2$，$Y=R$，则经过原点的每一条异于Y的直线都是Y的代数补子空间. 我们最感兴趣的是与Y垂直的代数补子空间，即与R垂直，且通过原点的那条直线，称之为R的直交补子空间. 类似地，也可以在内积空间中引入直交补子空间的概念.

定义 2 设X是内积空间，M是X的子集，称集合

$$M^{\perp}=\{x\in X\mid x\perp M\}$$

为M在X中的直交补.

读者不难证明$M^{\perp}$是X中的闭线性子空间，并且当M是线性子空间时，M与$M^{\perp}$是互补子空间. 又由直交补的定义，可知若M是X的线性子空间，则$M\cap M^{\perp}=\{0\}$. 当X是 Hilbert 空间时，我们有下面的投影定理.

定理 2 设Y是 Hilbert 空间X的闭子空间，那么成立

$$X=Y\dotplus Y^{\perp}. \tag{6}$$

证明 因为Y是X的闭子空间，所以Y是X的完备子空间，由推论1及引理1，对于任何$x\in X$，存在唯一$y\in Y$及$z\in Y^{\perp}$，使

$$x=y+z, \tag{7}$$

又若另有$y_1\in Y$及$z_1\in Y^{\perp}$，使$x=y_1+z_1$，则$y_1-y=z_1-z$，因$y-y_1\in Y$，$z_1-z\in Y^{\perp}$，于是$y_1-y=z_1-z\in Y\cap Y^{\perp}=\{0\}$，因此，$y=y_1$，$z=z_1$，这就证明了$X=Y\dotplus Y^{\perp}$，证毕.

当$X=Y\dotplus Z$，且$Y\perp Z$时，称X是Y和Z的直交和，记为$X=Y\oplus Z$，因此(6)式可以写成

$$X=Y\oplus Y^{\perp}. \tag{8}$$

若$y\perp z$，$x=y+z$，则写$x=y\oplus z$. 定理2告诉我们，当Y是Hilbert空间X的闭子空间时，对每个$x\in X$，存在唯一$y\in Y$及$z\in Y^{\perp}$，使$x=y\oplus z$，称y为x在空间Y上的直交投影，简称为投影. 利用投影，可以定义X到Y上的映照P如下：对任一$x\in X$，令

$$Px=y,$$

其中y是x在Y上的投影，称P为X到Y上的投影算子. 读者不难证明，投影算子具有下列一系列性质.

1° P是X到Y上的线性有界算子，且当$Y\neq\{0\}$时，$\|P\|=1$.

2° $PX=Y$，$PY=Y$，$PY^{\perp}=\{0\}$.

3° $P^2=P$，其中$P^2=P\cdot P$.

设X是内积空间，M是X的子集，记$(M^{\perp})^{\perp}=M^{\perp\perp}$，显然

$$M\subset M^{\perp\perp}. \tag{9}$$

反之，有下面的引理

引理2 **设Y是Hilbert空间X的闭子空间，则成立**

$$Y=Y^{\perp\perp}. \tag{10}$$

证明 由(9)，只要证明$Y^{\perp\perp}\subset Y$即可. 设$x\in Y^{\perp\perp}$，由投影定理，存在$y\in Y\subset Y^{\perp\perp}$及$z\in Y^{\perp}$，使$x=y\oplus z$. 因为$x\in Y^{\perp\perp}$，并且$Y^{\perp\perp}$是线性空间，所以$x-y\in Y^{\perp\perp}$，因此$z=x-y\in Y^{\perp}\cap Y^{\perp\perp}=\{0\}$，即

$z=0$, 所以 $x=y\in Y$, 这就证明了 $Y^{\perp\perp}\subset Y$. 证毕.

利用直交补, 可以得到内积空间 X 中子集 M 的线性包在 X 中稠密的判断方法.

引理 3 **设 M 是 Hilbert 空间 X 中非空子集, 则 M 的线性包 span$M$ 在 X 中稠密的充要条件为 $M^{\perp}=\{0\}$.**

证明 设 $x\in M^{\perp}$, 若 span M 在 X 中稠密, 则 $x\in\overline{\text{span } M}$, 因此, 存在 $x_n\in\text{span } M$, $n=1,2,\cdots$, 使 $x_n\to x$, 又因 $x\in M^{\perp}$, 所以 $\langle x_n, x\rangle=0$, $n=1,2,\cdots$, 由内积连续性, 得到 $\langle x,x\rangle=0$, 因而 $x=0$, 即 $M^{\perp}=\{0\}$. 反之, 设 $M^{\perp}=\{0\}$, 如果 $x\perp\text{span M}$, 则 $x\perp M$, 即 $x\in M^{\perp}$, 所以 $x=0$, 因此 $(\text{span } M)^{\perp}=\{0\}$, 但 $(\overline{\text{span}M})^{\perp}=(\text{span } M)^{\perp}$, 由投影定理, $X=\overline{\text{span } M}$, 即 span M 在 X 中稠密, 证毕.

§ 3. 希尔伯特空间中的就范直交系

仿照欧几里得空间中直交坐标系的概念, 我们在内积空间中引入直交系的概念.

定义 1 设 M 是内积空间 X 的一个不含零的子集, 若 M 中向量两两直交, 则称 M 为 X 中的直交系, 又若 M 中向量的范数都为 1, 则称 M 为 X 中就范直交系.

例 1 R^n 为 n 维欧氏空间, 则向量集

$$e_k=(\delta_{k1},\delta_{k2},\cdots,\delta_{kn}),\quad k=1,2,\cdots,n,$$

为 R^n 中就范直交系, 其中 δ_{kj} 当 $k=j$ 时, $\delta_{kj}=1$; $k\neq j$ 时, $\delta_{kj}=0$.

例 2 在空间 $L^2[0,2\pi]$ 中, 定义内积为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx,\quad f,g\in L^2[0,2\pi],$$

则三角函数系 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, $\cdots$, $\cos nx$, $\sin nx$, $\cdots$ 为 $L^2[0,2\pi]$

中就范直交系．所以内积空间中就范直交系是直交函数系概念的推广．

直交系有以下基本性质：

1° 对直交系M中任意有限个向量$x_1, x_2, \cdots, x_n$，成立

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2. \tag{1}$$

事实上，由于M中向量两两直交，所以

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2=\left\langle\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i\right\rangle$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\langle x_i,\ x_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle x_i,\ x_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

2° 直交系M是X中线性无关子集，事实上，设x_1，x_2，$\cdots$，$x_n\in M$，而且$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$，其中$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$为$n$个数，则对任何$1\leqslant j\leqslant n$，有

$$0=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, x_j\right\rangle=\alpha_j\langle x_j, x_j\rangle=\alpha_j\|x_j\|^2, \tag{2}$$

所以$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性无关，这就证明了M是X中线性无关子集．

我们在内积空间中引入就范直交系的目的是要把空间中的向量关于就范直交系展开成级数，为此，首先介绍一般线性赋范空间中级数收敛的概念．

定义 2 设X是线性赋范空间，$x_i, i=1,2,\cdots$是X中一列向量，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$是一列数，作形式级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i \tag{3}$$

称 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ 为级数(3)的n项部分和，若存在$x\in X$，使$S_n\to x$，

则称级数(3)收敛，并称 x 为这个级数的和，记为$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$.

若M为X中就范直交系，$e_1, e_2, \cdots$是M中有限或可列个向量，且$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$，则对每个自然数 j，由内积连续性，可以得到

$$\langle x, e_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i, e_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\langle e_i, e_j\rangle=\alpha_j,$$

所以 $x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle e_j$.

定义 3 设M为内积空间X中的就范直交系，$x\in X$，称数集

$$\{\langle x, e\rangle \mid e\in M\}$$

为向量 x 关于就范直交系M的富里叶系数集，而称$\langle x, e\rangle$为 x 关于 e 的富里叶系数.

例 3 设 $X=L^2[0,2\pi]$，M为例 2 中三角函数系，对于任何 $f\in L^2[0,2\pi]$，f 关于M的富里叶系数集即为：

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt=\langle f, \cos nt\rangle,\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt=\langle f, \sin nt\rangle,\quad n=1,2,\cdots$$

所以内积空间X中向量 x 关于就范直交系M的富里叶系数实际上是数学分析中富里叶系数概念的推广.

下面讨论富里叶系数的性质.

引理 1 **设X是内积空间，M是X中就范直交系，任取M中有限个向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，那么成立**

(1) $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2\geqslant 0$;

(2) $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|$, 其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为任 n 个数.

证明 因对任意 n 个数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 有

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2&=\left\langle x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\ x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\rangle\\&=\langle x, x\rangle-\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\ x\right\rangle-\left\langle x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\rangle\\&\quad+\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\rangle\\&=\|x\|^2-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i\langle x, e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2.\end{aligned}$$

令 $\alpha_i=\langle x, e_i\rangle$, $i=1, 2, \cdots, n$, 代入上式即得(1), 另一方面由上式及结论(1), 我们又有

$$\begin{aligned}&\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2-\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2\\&\qquad=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-\langle x, e_i\rangle|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

由此知(2)成立, 证毕.

从引理 1 中(2)的证明中, 可以看出在(2)中仅当

$$\alpha_i=\langle x, e_i\rangle, \qquad i=1, 2, \cdots, n$$

时, 等号才成立. 其次还可以看出, 若用 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的线性组合逼近 x, 则取 $\alpha_i=\langle x, e_i\rangle$, $i=1, 2, \cdots, n$ 时的逼近为最佳.

定理 1 (Bessel 不等式) 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 X 中的有限或

可列就范直交系，那么对每个$x\in X$，成立不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{4}$$

证明 如果$\{e_k\}$中只有有限个向量，则结论由引理1的(1)立即可得. 当$\{e_k\}$可列时，只要在引理1的(1)中，令$n\to\infty$，即得(4)式，证毕.

如果Bessel不等式中等号成立，则称此等式为Parseval等式.

引理2 设$\{e_k\}$为Hilbert空间X中可列就范直交系，那么成立

(1) 级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$收敛的充要条件为级数$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$收敛；

(2) 若 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$，则$\alpha_i=\langle x,e_i\rangle$，$i=1,2,\cdots$，

故 $$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i;$$

(3) 对任何$x\in X$，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$收敛.

证明 (1) 设$S_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$，由于$\{e_i\}$为就范直交系，所以对任何自然数$m$和$n$，$n>m$，成立

$$\|S_n-S_m\|^2=\|\alpha_{m+1}e_{m+1}+\cdots+\alpha_n e_n\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}|\alpha_i|^2$$
$$=\sigma_n-\sigma_m,$$

所以$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中柯西点列的充要条件为$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$是柯西数列，由$X$和数域的完备性，知(1)成立.

(2) 前已证过.

(3) 由Bessel不等式，知级数$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$收敛，由(1)及

(2), 知级数$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$收敛, 证毕.

推论 1 **设$\{e_i\}$是X中可列就范直交系, 则对任何$x\in X$,**

$$\lim_{n\to\infty}\langle x, e_n\rangle=0. \tag{5}$$

证明 由引理 1, 对任何$x\in X$, 级数$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x, e_i\rangle|^2\leqslant\|x\|^2$收敛, 所以一般项$\langle x, e_n\rangle\to 0$, $(n\to\infty)$证毕.

当X为$L^2[0, 2\pi]$, M为三角函数系时, 推论 1 即为黎曼一勒贝格引理. 下面讨论一般就范直交系的 Bessel 不等式. 设$\{e_k, k\in I\}$是X中就范直交系, 其中I为一指标集, 那么对任一$x\in X$, I中使$\langle x, e_k\rangle\neq 0$的指标$k$至多只有可列个, 事实上由 Bessel 不等式, 易知对任何正整数m, 使$|\langle x, e_k\rangle|>\frac{1}{m}$的指标$k$至多只有有限个, 所以集

$$\{e_k\mid\langle x, e_k\rangle\neq 0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{e_k\,\middle|\,|\langle x, e_k\rangle|>\frac{1}{m}\right\}$$

至多为可列集. 由此可以形式地作级数

$$\sum_{k\in I}\langle x, e_k\rangle e_k, \tag{6}$$

其中和式理解成对所有使$\langle x, e_k\rangle\neq 0$的指标$k$相加. 因此 Bessel 不等式可以写成

$$\sum_{k\in I}|\langle x, e_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{7}$$

我们的兴趣在于什么时候向量x可以写成由富里叶系数所作级数(6)的和, 为此, 首先引入完全就范直交系的概念.

定义 4 设M是内积空间X中的就范直交系, 如果

$$\overline{\operatorname{span} M}=X, \tag{8}$$

则称M是X中的完全就范直交系.

利用本章§2引理3，立即可以得到下列定理.

定理2 设M是Hilbert空间X中就范直交系，那么M完全的充要条件为 $M^{\perp}=\{0\}$.

这个定理告诉我们，在完全就范直交系中不能再加进新的向量，使之成为更大的就范直交系. 我们也可以用Parseval等式来检验就范直交系的完全性.

定理3 M是Hilbert空间中完全就范直交系的充要条件为对所有$x\in X$，成立Parseval等式.

证明 充分性，设Parseval等式对所有$x\in X$成立，若M不完全，由定理2，存在$x_0\neq 0$，$x_0\perp M$. 所以对任何$e\in M$，有$\langle x_0, e\rangle=0$，由于对该x_0成立Parseval等式

$$\|x_0\|^2=\sum_{e\in M}|\langle x_0, e\rangle|^2,$$

所以$\|x_0\|=0$，即$x_0=0$，这与$x_0\neq 0$矛盾.

必要性，设M是X中完全就范直交系，对任何$x\in X$，设其非零富里叶系数为$\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \cdots$，由引理2，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$收敛，设其和为$y$，则对任何自然数$i$，有

$$\begin{aligned}\langle x-y, e_i\rangle&=\langle x, e_i\rangle-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle\langle e_j, e_i\rangle\\&=\langle x, e_i\rangle-\langle x, e_i\rangle=0.\end{aligned}$$

又对M中一切使$\langle x, e\rangle=0$的向量e，有

$$\langle x-y, e\rangle=\langle x, e\rangle-\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle\langle e_j, e\rangle=0.$$

因此，$x-y\perp M$，由M的完全性，得到$x-y=0$，即$x=y$，所以$x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle e_j$，由此得到$\|x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\langle x, e_j\rangle|^2=\sum_{e\in M}|\langle x, e\rangle|^2$，即Parseval等式成立，证毕.

由定理 3 的证明，可以看出，当M是 Hilbert 空间X中完全就范直交系时，X 中每个向量 x 都可以展开成级数

$$x=\sum_{e\in M}\langle x, e\rangle e, \tag{9}$$

(9)式称为向量 x 关于就范直交系 M 的富里叶展开式.

推论 2 （Стеклов 定理）**设M是 Hilbert 空间X中就范直交系，若 Parseval 等式在X的某个稠密子集N上成立，则M完全.**

证明 设 $E=\overline{\text{span } M}$，则$E$是$X$中闭线性子空间，因在$N$上 Parseval 等式成立，由定理 3，易知对N中每个向量 x，都成立

$$x=\sum_{e\in M}\langle x, e\rangle e,$$

所以 $x\in E$，因而 $N\subset E$，由于E是闭线性子空间，故有 $\overline{N}\subset E$，但因 $\overline{N}=X$，所以 $E=X$，即M是X中完全就范直交系，证毕.

利用推论 2 不难证明例 2 中三角函数系是 $L^2[0, 2\pi]$中完全就范直交系，所以对任何 $f\in L^2[0,2\pi]$，$f(x)$都可展开成富里叶级数

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

其中等号右端级数是指在 $L^2[0,2\pi]$中平方平均收敛，a_0, a_k, b_k分别为例 3 中 f 关于三角函数系的富里叶系数.

由上所述，可见完全就范直交系是研究 Hilbert 空间的重要工具，那么是否每个非零 Hilbert 空间都有完全就范直交系，以及如何去得到完全就范直交系？为此首先介绍一般的 Gram-Schmidt 正交化过程.

引理 3 **设$\{x_1, x_2, \cdots\}$是内积空间X中有限或可列个线性无关向量，那么必有X中就范直交系$\{e_1, e_2\cdots\}$，使对任何正整数 n，有**

$$\text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}=\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}.$$

证明 令 $e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$，则 $\|e_1\|=1$，且 $\text{span}\{e_1\}=\text{span}\{x_1\}$，令 $v_2=x_2-\langle x_2, e_1\rangle e_1$，因为 x_1, x_2 线性无关，所以 $v_2\neq 0$，且 $v_2\perp e_1$，令 $e_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}$，则 $\|e_2\|=1$，且 $e_2\perp e_1$. 显然 $\text{span}\{e_1, e_2\}=\text{span}\{x_1, x_2\}$，如果已作了 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$，其中 $\|e_i\|=1, i=1,2,\cdots,n-1$，并且两两直交，满足 $\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}\}=\text{span}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$，则令 $v_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}\langle x_n, e_k\rangle e_k$，由 $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关，知 $v_n\neq 0$，令 $e_n=\frac{v_n}{\|v_n\|}$，则 $\|e_n\|=1$，且 $e_n\perp e_i, i=1,2,\cdots,n-1$，又显然满足 $\text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}=\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，这样一直下去，即可得到所要求的就范直交系. 证毕.

引理 3 的过程称为 Gram-Schmidt 正交化过程，容易明白，$\sum_{i=1}^{n-1}\langle x_n, e_i\rangle e_i$ 是向量 x_n 在空间 $\text{span}\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ 上的投影.

定理 4 每个非零 Hilbert 空间必有完全就范直交系.

证明 只对可分的情况证明，设 X 为可分 Hilbert 空间，则存在有限或可列个向量 $\{x_i\}$，使 $\text{span}\{x_i\}=X$，不妨设 $\{x_i\}$ 为 X 中的线性无关子集，否则可取 $\{x_i\}$ 中的线性无关子集. 由引理 3，存在有限或可列个就范直交系 $\{e_i\}$，使对任何自然数 n，成立

$$\text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}=\text{span}\{x_1, \cdots, x_n\},$$

所以，由 $\{e_i\}$ 张成的线性空间包含 $\{x_i\}$，因此 $\overline{\text{span}\{e_i\}}\supset\overline{\text{span}\{x_i\}}=X$，即 $\{e_i\}$ 是 X 中完全就范直交系，证毕.

可以证明，如果 M 及 M_1 同为 Hilbert 空间 X 的完全就范直交系，那么 M 和 M_1 具有相同的势，称这个势为 X 的 Hilbert 维数，若 $X=\{0\}$，则定义 X 的 Hilbert 维数为0. 由 Gram-Schmidt 正交化过程，易知当 X 是有限维空间时，Hilbert 维数与线性维数

一致.

为了研究 Hilbert 空间及其上的线性算子，把一个抽象的Hilbert 空间表示成一个具体的 Hilbert 空间是有好处的.

定义 5 设 X 和$\tilde{X}$是两个内积空间. 若存在X 到 $\tilde{X}$ 上的映照 T，使对任何 $x, y\in X$ 及数 α, β，满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty, \tag{10}$$
$$\langle Tx, Ty\rangle=\langle x, y\rangle,$$

则称X和 $\tilde{X}$ 同构，并称T 为X到 $\tilde{X}$ 上的同构映照.

定理 5 两个 Hilbert 空间X与 $\tilde{X}$ 同构的充要条件是X与 $\tilde{X}$ 具有相同的 Hilbert 维数.

证明 若X与$\tilde{X}$同构，T为X到 $\tilde{X}$ 上的同构映照，由(10)易知 T将X中完全就范直交系映照成 $\tilde{X}$ 中完全就范直交系，并且T是一对一的，所以X与 $\tilde{X}$ 具有相同的 Hilbert 维数. 反之，若X与 $\tilde{X}$ 的 Hilbert 维数相同，不妨设 $X\neq\{0\}$，否则结论是平凡的. 设 M 和 $\tilde{M}$ 分别X和 $\tilde{X}$ 中完全就范直交系，由假设，M和$\tilde{M}$具有相同的基数，所以可将M与 $\tilde{M}$ 分别写成 $M=\{e_k, k\in\Lambda\}$，$\tilde{M}=\{\tilde{e}_k, k\in\Lambda\}$，其中 Λ 为与M和 $\tilde{M}$ 等基数的指标集，由定理 3 及(9)式，对任何 $x\in X$ 及$\tilde{x}\in\tilde{M}$，有

$$x=\sum_{k\in\Lambda}\langle x, e_k\rangle e_k, \qquad \tilde{x}=\sum_{k\in\Lambda}\langle\tilde{x}, \tilde{e}_k\rangle\tilde{e}_k,$$

并且$\sum\limits_{k\in\Lambda}|\langle x, e_k\rangle|^2=\|x\|^2<\infty$，$\sum\limits_{k\in\Lambda}|\langle\tilde{x}, \tilde{e}_k\rangle|^2=\|\tilde{x}\|^2<\infty$，设 $x=\sum\limits_{k\in\Lambda}\langle x, e_k\rangle e_k$，令 $Tx=\sum\limits_{k\in\Lambda}\langle x, e_k\rangle\tilde{e}_k$，由引理 2，$Tx\in\tilde{X}$，且对$X$中任两个向量，$x=\sum\limits_{k\in\Lambda}\langle x, e_k\rangle e_k$，$y=\sum\limits_{k\in\Lambda}\langle y, e_k\rangle e_k$，成立

$$\begin{aligned}\langle Tx, Ty\rangle&=\left\langle\sum_{k\in\Lambda}\langle x, e_k\rangle\tilde{e}_k, \sum_{k\in\Lambda}\langle y, e_k\rangle\tilde{e}_k\right\rangle\\&=\sum_{k\in\Lambda}\langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle}=\langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

又若 $\tilde{x}=\sum\limits_{k\in\Lambda}\langle\tilde{x},\tilde{e}_k\rangle\tilde{e}_k$ 为 $\tilde{X}$ 中任何向量，令 $x=\sum\limits_{k\in\Lambda}\langle\tilde{x},\ \tilde{e}_k\rangle e_k$，由引理 2 知 $x\in X$，显然 $Tx=\tilde{x}$，即 T 是到 $\tilde{X}$ 上的映照，易知 T 也保持线性运算不变，所以 T 为 X 到 $\tilde{X}$ 上同构映照，即 X 与 $\tilde{X}$ 同构，证毕.

对于可分 Hilbert 空间，由定理 5，并利用 Gram-Schmidt 方法，立即可以得到下面的推论，

推论 3　任何可分 Hilbert 空间必和某个 R^n 或 l^2 同构.

§4. 希尔伯特空间上的线性连续泛函

现在我们利用 §2 的投影定理来研究 Hilbert 空间上线性连续泛函的一般形式

定理 1 (Riesz 定理)　设 X 是 Hilbert 空间，f 是 X 上线性连续泛函，那么存在唯一的 $z\in X$，使对每个 $x\in X$，有

$$f(x)=\langle x,z\rangle, \tag{1}$$

并且 $\|f\|=\|z\|$.

证明　若 $f=0$，则令 $z=0$，结论自然成立，若 $f\neq0$，令 $\mathscr{N}(f)$ 为 f 的零空间，由(1)可知，如果这样的 z 存在，那么必有 $z\in\mathscr{N}(f)^{\perp}$。因 $f\neq0$，所以 $\mathscr{N}(f)\neq X$，又因 f 是 X 上线性连续泛函，由第七章 §1 定理 2，$\mathscr{N}(f)$ 为 X 的闭子空间，所以完备，由投影定理，$\mathscr{N}(f)^{\perp}\neq\{0\}$，设 $z_0\neq0$，$z_0\in\mathscr{N}(f)^{\perp}$，对任何 $x\in X$，令 $v=f(x)z_0-f(z_0)x$，则 $f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0$，即 $v\in\mathscr{N}(f)$，所以

$$0=\langle v,z_0\rangle=\langle f(x)z_0-f(z_0)x,z_0\rangle=f(x)\langle z_0,z_0\rangle-f(z_0)\langle x,z_0\rangle,$$

由于 $\langle z_0,z_0\rangle=\|z_0\|^2\neq0$，所以

$$f(x)=\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}\langle x,z_0\rangle=\langle x,\overline{\frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}}z_0\rangle,$$

令 $z=\overline{\dfrac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}}z_0$，则 $f(x)=\langle x,z\rangle$. 又若另有 $z_1\in X$，使对任何 $x\in X$，

成立 $f(x)=\langle x, z_1\rangle$，那么 $\langle x, z-z_1\rangle=0$，特取 $x=z-z_1$，则 $\|z-z_1\|^2=\langle z-z_1, z-z_1\rangle=0$，所以 $z=z_1$，这就证明了唯一性，下证 $\|f\|=\|z\|$，只要对 $f\neq 0$ 证明即可．因 $f\neq 0$，所以 $z\neq 0$，由(1)式，令 $x=z$，则

$$\|z\|^2=\langle z, z\rangle=f(z)\leqslant\|f\|\ \|z\|,$$

所以 $\|z\|\leqslant\|f\|$，反之，由 Schwarz 不等式，$|f(x)|=|\langle x, z\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|z\|$，因此，$\|f\|\leqslant\|z\|$，因而得到 $\|f\|=\|z\|$，证毕.

对每个 $y\in X$，令 $Ty=f_y$，其中 f_y 为 X 上如下定义的泛函：

$$f_y(x)=\langle x, y\rangle, x\in X,$$

显然，f_y 是 X 上线性连续泛函．并且由 Riesz 定理，T 是 X 到 X^* 上的映照，其中 X^* 表示 X 上线性连续泛函全体所成的 Banach 空间，又 $\|Ty\|=\|y\|$．容易看出，对任何 $x, y\in X$ 及任何数 α, β，成立

$$T(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}Tx+\bar{\beta}Ty. \tag{2}$$

事实上，对任何 $z\in X$，有

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)(z)&=\langle z, \alpha x+\beta y\rangle=\bar{\alpha}\langle z, x\rangle+\bar{\beta}\langle z, y\rangle\\&=\bar{\alpha}Tx(z)+\bar{\beta}Ty(z)=(\bar{\alpha}Tx+\bar{\beta}Ty)(z),\end{aligned}$$

所以(2)式成立．称满足(2)式的映照 T 是复共轭线性映照，所以映照 $Ty=f_y$ 是 X 到 X^* 上保持范数不变的复共轭线性映照，称为复共轭同构映照，若存在 Hilbert 空间 X 到 $\tilde{X}$ 上的复共轭同构映照，则称 X 与 $\tilde{X}$ 是复共轭同构，并不加以区别视为同一，写成 $X=\tilde{X}$，因此，当 X 是 Hilbert 空间时，$X=X^*$，即 X 是自共轭的.

设 X 是 n 维内积空间，$e_1, \cdots, e_n$ 为 X 中就范直交系，A 为 X 到 X 中线性算子，由第七章§1例5知 A 与 n 阶矩阵 (a_{ij}) 相对应，其中 $a_{ij}=\langle Ae_j, e_i\rangle$，$i, j=1, 2, \cdots, n$，令 (b_{ij}) 表示矩阵 (a_{ij}) 的共轭转置矩阵，即 $b_{ij}=\overline{a_{ji}}$，$i, j=1, 2, \cdots, n$，记 (b_{ij}) 所对应算子为 A^*，则

$$\langle A^*e_j, e_i\rangle=b_{ij}=\overline{a_{ji}}=\overline{\langle Ae_i, e_j\rangle}=\langle e_j, Ae_i\rangle,$$

或

$$\langle Ae_i, e_j\rangle = \langle e_i, A^* e_j\rangle.$$

因此,对X中任何向量$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$及$y=\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$,有

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j \langle Ae_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j \langle e_i, A^* e_j\rangle = \langle x, A^* y\rangle,$$

下面我们把有限维空间中共轭转置矩阵的概念推广到一般内积空间中去.

定理 2　设X和Y是两个 Hilbert 空间,$A\in\mathscr{B}(X\to Y)$,那么存在唯一的$A^*\in\mathscr{B}(Y\to X)$,使对任何$x\in X$及$y\in Y$,成立

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \tag{3}$$

并且$\|A^*\| = \|A\|$.

证明　对任何$y\in Y$,令

$$f_y(x) = \langle Ax, y\rangle,\ x\in X,$$

由于$A\in\mathscr{B}(X\to Y)$,易知f_y是X上线性泛函,并且由 Schwarz 不等式,成立

$$|f_y(x)| = |\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|Ax\|\cdot\|y\| \leqslant \|A\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|,\ x\in X,$$

即$f_y\in X^*$,并且$\|f_y\|\leqslant\|A\|\cdot\|y\|$,由 Riesz 表示定理,存在唯一$z\in X$,使对任何$x\in X$,成立

$$\langle Ax, y\rangle = f_y(x) = \langle x, z\rangle,$$

并且$\|f_y\| = \|z\|$,令$A^* y = z$,则$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$,下证$A^*\in\mathscr{B}(Y\to X)$,事实上,对任何$y, z\in Y$及数$\alpha, \beta$,因为当$x\in X$时,成立

$$\begin{aligned}\langle Ax, \alpha y+\beta z\rangle &= \bar{\alpha}\langle Ax, y\rangle + \bar{\beta}\langle Ax, z\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle x, A^* y\rangle + \bar{\beta}\langle x, A^* z\rangle = \langle x, \alpha A^* y + \beta A^* z\rangle,\end{aligned}$$

所以$A^*(\alpha y+\beta z) = \alpha A^* y + \beta A^* z$,即$A^*$是线性算子,又由$A^*$定义,对任何$y\in Y$,有$\|A^* y\| = \|f_y\| \leqslant \|A\|\|y\|$,因此,$A^*\in\mathscr{B}(Y\to X)$,且$\|A^*\|\leqslant\|A\|$. 另一方面,在(3)中,令$y=Ax$,则有

$$\|Ax\|^2=\langle x, A^*Ax\rangle\leqslant\|x\|\ \|A^*Ax\|\leqslant\|x\|\|A^*\|\ \|Ax\|,$$

因此当 $Ax\neq0$ 时，成立

$$\|Ax\|\leqslant\|A^*\|\ \|x\|. \tag{4}$$

当 $Ax=0$ 时，(4)式自然成立，因而$\|A\|\leqslant\|A^*\|$，这就证明了$\|A\|=\|A^*\|$. 又若另有算子 $B\in\mathscr{B}(Y\to X)$，使对任何 $x\in X, y\in Y$ 成立

$$\langle Ax, y\rangle=\langle x, By\rangle,$$

则$\langle x, (B-A^*)y\rangle=0$，令 $x=(B-A^*)y$，则$\|(B-A^*)y\|=0$，即 $By=A^*y$，因此，$B=A^*$，证毕.

定义 1 设 A 是 Hilbert 空间X到 Hilbert 空间Y中的线性有界算子，则称定理 2 中的算子 A^*为 A 的 Hilbert 共轭算子，或简称为共轭算子.

关于共轭算子有以下基本性质：

1° $(A+B)^*=A^*+B^*$;

2° $(\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*$;

3° $(A^*)^*=A$;

4° $\|A^*A\|=\|AA^*\|=\|A\|^2$，由此可知 $A^*A=0$ 等价于 $A=0$，

5° 当 $X=Y$ 时，$(AB)^*=B^*A^*$.

我们只证 4°，其余留给读者自行证明，事实上，由 Schwarz 不等式，

$$\|Ax\|^2=\langle Ax, Ax\rangle=\langle x, A^*Ax\rangle\leqslant\|A^*Ax\|\ \|x\|\leqslant\|A^*A\|\|x\|^2,$$

所以$\|Ax\|\leqslant\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}\|x\|$，因此$\|A\|\leqslant\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$，又因$\|A^*A\|\leqslant\|A^*\|\|A\|=\|A\|^2$，所以$\|A^*A\|=\|A\|^2$，在上面证明过程中，用 A^* 代 A，并由 3°，$(A^*)^*=A$，得到$\|AA^*\|=\|(A^*)^*A^*\|=\|A^*\|^2=\|A\|^2$，这就证明了 4° 成立.

§ 5. 自伴算子、酉算子和正常算子

在矩阵理论中，我们已经研究过 Hermitian 阵，酉阵和正常

阵，下面我们要在 Hilbert 空间中建立起相应的自伴算子，酉算子和正常算子的概念，并讨论这些算子的一些基本性质.

定义 1 设 T 为 Hilbert 空间 X 到 X 中的线性有界算子，若 $T=T^*$，则称 T 为 X 上的自伴算子；若 $TT^*=T^*T$，则称 T 为 X 上正常算子；若 T 是 X 到 X 上的一对一映照，且 $T^*=T^{-1}$，则称 T 为 X 上的酉算子.

当 T 是自伴算子时，由 T^* 的定义，对一切 $x,y\in X$，成立

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle. \tag{1}$$

显然自伴算子必为正常算子. 又由酉算子定义，成立

$$T^*T=TT^*=I, \tag{2}$$

其中 I 为 X 上恒等算子；反之，若(2)式成立，则 T 为 X 上酉算子. 由(2)式，知酉算子必为正常算子. 正常算子不一定是酉算子或自伴算子，例 $T=2iI$，则 $T^*=-2iI$，所以 $TT^*=T^*T=4I$，即 T 是正常算子，但显然 T 不是自伴算子和酉算子.

为了讨论这些算子的一些基本性质，首先证明下面的引理.

引理 1 **设 T 为复内积空间 X 上线性有界算子，那么 $T=0$ 的充要条件为对一切 $x\in X$，成立**

$$\langle Tx,x\rangle=0. \tag{3}$$

证明 若 $T=0$，显然有 $\langle Tx,x\rangle=0$；反之，如果(3)式对一切 $x\in X$ 成立，对任何 $x,y\in X$ 及数 α，令 $v=\alpha x+y$，由条件得

$$\begin{aligned}0=\langle Tv,v\rangle&=|\alpha|^2\langle Tx,x\rangle+\langle Ty,y\rangle+\alpha\langle Tx,y\rangle+\bar{\alpha}\langle Ty,x\rangle\\&=\alpha\langle Tx,y\rangle+\bar{\alpha}\langle Ty,x\rangle,\end{aligned} \tag{4}$$

令 $\alpha=i$，则 $\bar{\alpha}=-i$，此时由(4)式.

$$\langle Tx,y\rangle-\langle Ty,x\rangle=0, \tag{5}$$

又若令 $\alpha=1$，则由(4)式可得

$$\langle Tx,y\rangle+\langle Ty,x\rangle=0, \tag{6}$$

将(5)式与(6)式相加，得到 $\langle Tx,y\rangle=0$，由于 x,y 是 X 中的任意向

量，所以 $T=0$，证毕.

定理 1 **设 T 为复 Hilbert 空间 X 上线性有界算子，则 T 为自伴算子的充要条件为对一切 $x\in X$，$\langle Tx, x\rangle$ 是实数.**

证明 若 T 为自伴算子，则对所有 $x\in X$，有

$$\overline{\langle Tx, x\rangle}=\langle x, Tx\rangle=\langle Tx, x\rangle,$$

因此 $\langle Tx, x\rangle$ 是实数；反之，如果对所有 $x\in X$，$\langle Tx, x\rangle$ 皆为实数，则

$$\langle Tx, x\rangle=\overline{\langle Tx, x\rangle}=\overline{\langle x, T^*x\rangle}=\langle T^*x, x\rangle,$$

所以 $\langle (T-T^*)x, x\rangle=0$. 由引理 1，$T=T^*$，即 T 自伴，证毕.

下面讨论自伴算子的运算. 由定义立即可知，若 T_1 和 T_2 是 X 上两个自伴算子，则 T_1-T_2，T_1-T_2 仍为 X 上自伴算子，关于乘法我们有下面的定理.

定理 2 **设 T_1 和 T_2 是 Hilbert 空间 X 上两个自伴算子，则 $T_1\cdot T_2$ 自伴的充要条件为 $T_1\cdot T_2=T_2\cdot T_1$.**

证明 由共轭算子性质，$(T_1\cdot T_2)^*=T_2^*\cdot T_1^*=T_2\cdot T_1$，所以 $T_1\cdot T_2$ 自伴的充要条件为 $T_2\cdot T_1=T_1\cdot T_2$，证毕.

定理 3 **设 $\{T_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 上一列自伴算子，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$，那末 T 仍为 X 上自伴算子.**

证明 因 $\|T_n-T\|\to 0$，由于 $\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n^*=T^*$，但 T_n 自伴，故 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n^*=T$，因此由极限的唯一性，成立 $T^*=T$. 证毕.

上面这些定理对进一步研究自伴算子，特别是研究自伴算子谱理论是很有用的. 下面讨论酉算子的一些基本性质.

定理 4 **设 U 及 V 是 Hilbert 空间 X 上两个酉算子，那末**

(1) U 是保范算子，即对任何 $x\in X$，成立 $\|Ux\|=\|x\|$；

(2) 当 $X\neq\{0\}$ 时，$\|U\|=1$；

(3) U^{-1} 是酉算子；

(4) UV 是酉算子；

(5) 若 $U_n, n=1,2,\cdots$ 是 X 上一列酉算子，且 U_n 收敛于有界算子 A，则 A 也为酉算子.

证明 (1)，由酉算子定义，$\|Ux\|^2=\langle Ux, Ux\rangle=\langle x, U^*Ux\rangle=\langle x,x\rangle=\|x\|^2$.

(2) 由(1)立即可得.

(3) 因 U 为一一到上，故 U^{-1} 也一一到上，并且由于 $(U^{-1})^*=U^{**}=U=(U^{-1})^{-1}$，所以 U^{-1} 仍为酉算子.

(4) 因 U 及 V 为酉算子，故为一一到上映照，所以 $U\cdot V$ 仍为一一到上映照，且 $(U\cdot V)^*=V^*\cdot U^*=V^{-1}\cdot U^{-1}=(U\cdot V)^{-1}$，所以 $U\cdot V$ 仍为酉算子.

(5) 因 $U_n\to A$，所以 $\|U_n^*-A^*\|=\|U_n-A\|\to 0$，即 $U_n^*\to A^*$，因此 $A^*A=\lim\limits_{n\to\infty}U_n^*U_n=I$，同理可证 $AA^*=I$，故 A 为酉算子，证毕.

定理 4 中(1)的逆命题不一定成立，即保范算子不一定为酉算子.

例 1 设 $X=l^2$，T 为 l^2 中如下定义的算子，对任何 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^2$，令

$$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots).$$

显然 T 是 l^2 到 l^2 中的线性算子，并且

$$\|T(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2=\|(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\|^2,$$

所以 T 是保范算子，但 T 的象为 l^2 中第一个坐标为 0 的向量全体. 故 T 不映照到上，因此不为酉算子，称 T 为 l^2 上单向移位算子.

定理 5 **设 T 为复 Hilbert 空间 X 上线性有界算子，那么 T 是酉算子的充要条件为 T 是映照到上的保范算子.**

证明 由定理4的(1)，只要证充分性即可，设 T 为 X 到 X 上的保范算子，所以 T 是一对一的，并且对任何 $x\in X$，有

$$\langle T^*Tx, x\rangle=\langle Tx, Tx\rangle=\langle x, x\rangle,$$

所以 $\langle (T^*T-I)x, x\rangle=0$，由引理1，$T^*T=I$. 又因 T 是映照到 X 上的，故 T^{-1} 在全空间 X 上有定义，由于 $T^*T=I$，所以 $T^*TT^{-1}=T^{-1}$，即 $T^*=T^{-1}$，这就证明了 T 为酉算子，证毕.

下面介绍正常算子的一些基本性质，设 T 是复 Hilbert 空间 X 上的有界算子，令

$$A=\frac{T+T^*}{2}, \qquad B=\frac{T-T^*}{2i},$$

容易证明 A 和 B 是自伴算子，并且有 $T=A+iB$，称 A 和 B 分别为算子 T 的实部和虚部，并称 $T=A+iB$ 为算子 T 的笛卡尔分解.

定理6 **设 T 是复 Hilbert 空间 X 上线性有界算子，$A+iB$ 为 T 的笛卡尔分解，则 T 为正常算子的充要条件为 $AB=BA$.**

证明 因 $T^*=(A+iB)^*=A^*-iB^*=A-iB$，

所以

$$TT^*=(A+iB)(A-iB)=A^2+B^2-iAB+iBA,$$

$$T^*T=(A-iB)(A+iB)=A^2+B^2-iBA+iAB,$$

因此，$T^*T=TT^*$ 的充要条件为 $BA-AB=-BA+AB$，即 $BA=AB$，证毕.

定理7 **设 T 为复 Hilbert 空间 X 上线性有界算子，则 T 为正常算子的充要条件为对任何 $x\in X$，成立 $\|T^*x\|=\|Tx\|$.**

证明 必要性，若 $T^*T=TT^*$，则对任何 $x\in X$，成立

$$\|T^*x\|^2=\langle T^*x, T^*x\rangle=\langle TT^*x, x\rangle=\langle T^*Tx, x\rangle=\langle Tx, Tx\rangle$$

$=\|Tx\|^2$，所以 $\|T^*x\|=\|Tx\|$.

充分性，若对任何 $x\in X$，成立 $\|T^*x\|=\|Tx\|$，则

$$\langle (T^*T-TT^*)x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle - \langle TT^*x, x\rangle$$
$$= \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = 0,$$

由引理 1, $T^*T=TT^*$, 即 T 是 X 上正常算子, 证毕.

第八章 习 题

1. 设$\{x_n\}$是内积空间X中点列, 若$\|x_n\|\to\|x\|(n\to\infty)$, 且对一切 $y\in X$ 有$\langle x_n, y\rangle\to\langle x, y\rangle$, $(n\to\infty)$, 证明 $x_n\to x(n\to\infty)$.

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是一列内积空间, 令

$$X=\{\{x_n\} \mid x_n\in X_n, \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\},$$

当$\{x_n\}, \{y_n\}\in Y$ 时, 规定 $\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\}$, 其中 α, β是数,

$$\langle\{x_n\}, \{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, y_n\rangle,$$

证明X是内积空间. 又当 X_n 都是 Hilbert 空间时, 证明X也是 Hilbert 空间.

3. 设X是 n 维线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$是X的一组基, 证明$\langle x, y\rangle$成为X上内积的充要条件是存在 $n\times n$ 正定方阵 $A=(a_{\mu\nu})$, 使得

$$\langle\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu e_\nu, \ \sum_{\nu=1}^{n}y_\nu e_\nu\rangle=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}x_\mu y_\nu.$$

4. 令H表示如下函数$x(t)$全体: $x(t)\in L[0, 2\pi]$, 并且$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)<\infty$, 其中 a_n和 b_n是 $x(t)$的富里叶系数. 令

$$\|x\|_H=\sqrt{\pi}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证明H是 Hilbert 空间.

5. 设X是实内积空间, 若$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, 则$x\perp y$, 当$X$是复内积空间时, 这个结论是否仍然成立?

6. 证明内积空间X中两个向量 x, y 垂直的充要条件是: 对一切数 α, 成立$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$.

7. 设X是 Hilbert 空间, $M\subset X$, 并且 $M\neq\phi$, 证明$(M^\perp)^\perp$是X中包含

M的最小闭子空间.

8. 设$\{e_n(x)\}$是$L^2[a,b]$中的就范直交系,说明$\{e_n(x)e_m(y)\}$是$L^2([a,b]\times[a,b])$中的就范直交系,若$\{e_n(x)\}$完全,则$\{e_n(x)e_m(y)\}$也是完全的.

9. 设$e_1,e_2,\cdots e_n$为内积空间X中就范直交系,证明X到$\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$的投影算子$P$为

$$Px=\sum_{\nu=1}^{n}\langle x,e_\nu\rangle e_\nu,\quad x\in X.$$

10. 设X为可分Hilbert空间,证明X中任何就范直交系至多为可列集.

11. 设X是内积空间,X^*是它的共轭空间,f_z表示X上线性泛函$f_z(x)=\langle x,z\rangle$,若$X$到$X^*$的映照$F$: $z\to f_z$是一一到上的映照,则X是Hilbert空间.

12. 设X和Y为Hilbert空间,A是X到Y中的线性有界算子,$\mathscr{N}(A)$和$\mathscr{R}(A)$分别表示算子A的零空间和值域,证明

$$\mathscr{N}(A)=\mathscr{R}(A^*)^\perp,\qquad \mathscr{N}(A^*)=\mathscr{R}(A)^\perp$$
$$\overline{\mathscr{R}(A)}=\mathscr{N}(A^*)^\perp,\quad \overline{\mathscr{R}(A^*)}=\mathscr{N}(A)^\perp.$$

13. 设T是Hilbert空间X中有界线性算子,$\|T\|\leqslant 1$,证明$\{x|Tx=x\}=\{x|T^*x=x\}$.

14. 设H是Hilbert空间,M是H的闭子空间,$x_0\in H$,证明

$\min\{\|x-x_0\|\,|x\in M\}=\max\{|<x_0,y>|\,|y\in M^\perp,\|y\|=1\}$.

15. 设H是复Hilbert空间,M为H的闭子空间,则M为H上某个非零线性连续泛函的零空间的充要条件是$M^\perp$是一维子空间.

16. 设X是复Hilbert空间,A是X上线性有界算子,证明$A=-A^*$的充要条件是对一切$x\in X$, $\mathrm{Re}<Ax,x>=0$.

17. 设X是复Hilbert空间,J是X上自伴算子,又对任何$x\in X$,$\langle Jx,x\rangle\geqslant c\langle x,x\rangle$,其中$c>0$,证明$X$按内积$\langle x,y\rangle_J=\langle Jx,y\rangle$成为Hilbert空间,记为$X_J$,证明$X_J$中线性有界算子$A$为$X_J$中自伴算子的充要条件为$JA=A^*J$,这里$A^*$为$A$在$X$中共轭算子.

18. 设T为Hilbert空间X上正常算子,$T=A+iB$为T的笛卡尔分解,证明

(1) $$\|T\|^2=\|A^2+B^2\|,$$

(2) $$\|T^2\|=\|T\|^2$$

19. 证明当A是内积空间X上自伴算子时,$A=0$的充要条件为对所有

$x\in X$, 成立$\langle Ax, x\rangle=0$.

20. 设U是 Hilbert 空间 $L^2[0, 2\pi]$中如下定义的算子:

$$(Uf)(t)=e^{it}f(t),\quad f\in L^2[0, 2\pi],$$

证明U是酉算子.

21. 设A是复 Hilbert 空间X到X中的保范算子, 证明必有 Hilbert 空间 $\tilde{X}$, $\tilde{X}\supset X$, 使得A能延拓成$\tilde{X}$到$\tilde{X}$上的酉算子.

22. 设Ω是平面上L-可测集, 令$L^2(\Omega)$表示Ω上关于平面 Lebesgue 测度平方可积函数全体, 对每个$f(z)\in L^2(\Omega)$, 定义

$$(Tf)(z)=zf(z),\ z\in\Omega,$$

证明T是正常算子.

第九章　巴拿赫空间中的基本定理

本章将介绍 Banach 空间中的四个著名定理：Hahn-Banach 泛函延拓定理，一致有界性定理，逆算子定理和闭图象定理，这些定理充分显示了泛函分析的威力及其广泛应用。

§1. 泛函延拓定理

本节所讨论的问题是：任何非零赋范空间上是否有非零线性连续泛函？如果有，是否有足够多？这些问题与下面的泛函延拓问题有关，即在一个子空间(那怕是有限维子空间)上线性连续泛函是否可以延拓成为整个空间上的线性连续泛函而保持范数不变？这些都是泛函分析中的最基本问题。

我们把问题提得更具体一些，设 X 是线性赋范空间，Z 是 X 的子空间，f 是 Z 上线性连续泛函，令 $\|f\|_Z=\sup\limits_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}}|f(x)|$，则 $\|f\|_Z<\infty$，于是当 $x\in Z$ 时，有 $|f(x)|\leqslant\|f\|_Z\|x\|$，现在问：是否存在整个空间 X 上的线性连续泛函 $\tilde{f}$，使当 $x\in Z$ 时，有 $\tilde{f}(x)=f(x)$，并且 $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z$，即对任何 $x\in X$，成立 $|\tilde{f}(x)|\leqslant\|f\|_Z\|x\|$？

为了解决这个问题，我们令 $p(x)=\|f\|_Z\|x\|$，则 $p(x)$ 是在整个 X 上有定义的泛函，并且满足

1° $p(\alpha x)=|\alpha|p(x), x\in X$，$\alpha$ 为数；

2° $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，$x,y\in X$，

称 X 上满足条件 1° 和 2° 的泛函为次线性泛函。这样，前面所提问题可以化成下面更一般的问题：设 f 是线性空间 X 的子空间

Z 上定义的线性泛函，$p(x)$是 X 上次线性泛函，满足$|f(x)|\leqslant p(x)$，$x\in Z$，问是否存在 X 上定义的线性泛函 $\tilde{f}$，使在 Z 上成立 $\tilde{f}(x)=f(x)$，并且满足$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)$，$x\in X$？

定理1(Hahn-Banach 泛函延拓定理) **设 X 是实线性空间，$p(x)$是 X 上次线性泛函．若 f 是 X 的子空间 Z 上的实线性泛函，且被 $p(x)$控制，即满足**

$$f(x)\leqslant p(x),\ x\in Z,$$

则存在 X 上的实线性泛函 $\tilde{f}$，使当 $x\in Z$ 时，有 $\tilde{f}(x)=f(x)$，并且在整个空间 X 上仍被 $p(x)$控制，

$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x),\ x\in X.$$

证明 我们一维一维地逐步延拓，不妨设 Z 为X的真子空间，否则结论是平凡的．因$Z\neq X$，存在 $x_0\in X$，但 $x_0\overline{\in}Z$．记 Y 为由Z和 x_0 所张成的线性子空间，则 Y 中任何元素 y，可以被唯一地表示成为 $y=x+tx_0$．其中 $x\in Z$，t 是实数．事实上，若又有 $y=x_1+t_1x_0$，$x_1\in Z$，t_1 为实数，则有 $x-x_1=(t_1-t)x_0$，但 $x-x_1\in Z$，$x_0\neq 0$，且 $x_0\overline{\in}Z$，所以必须 $t_1-t=0$，因而 $t_1=t$，$x_1=x_0$．我们首先把 Z 上的泛函 f 延拓到 Y 上．如果线性泛函 g 是 f 在 Y 上的延拓，则对 Y 中任意向量 $y=x+tx_0$，$x\in Z$，t 为实数，有

$$g(y)=f(x)+tg(x_0),$$

其中 $f(x)$是已知的(因 $x\in Z$)，y 给定后，t 也唯一确定了，因此要确定 g 在 y 的值，只要确定与 x 和 t 都无关的实数值 $g(x_0)$，使对任何 $y\in Y$，都有 $g(y)\leqslant p(y)$，即只要寻找实数 c，使不等式 $f(x)+tc\leqslant p(x+tx_0)$对一切 $x\in Z$ 和一切实数 t 成立，为此，只要寻找实数 c，使对一切 $x\in X$ 和一切 $t>0$，不等式

$$c\leqslant\frac{1}{t}\Big[p(x+tx_0)-f(x)\Big]=p\Big(\frac{x}{t}+x_0\Big)-f\Big(\frac{x}{t}\Big)$$

和对一切 $x\in X$，$t<0$，不等式

$$c \geqslant \frac{1}{t}[p(x+tx_0)-f(x)] = -p\left(\frac{x}{-t}-x_0\right)+f\left(\frac{x}{-t}\right)$$

同时成立即可，也就是说 c 必须同时满足下列两个不等式，

$$c \leqslant p(x'+x_0)-f(x'), \quad x' \in Z,$$
$$c \geqslant -p(x''-x_0)+f(x''), x'' \in Z.$$

显然要使满足上述两不等式的实数 c 存在，须且只须不等式

$$-p(x''-x_0)+f(x'') \leqslant p(x'+x_0)-f(x'),$$

即不等式

$$f(x')+f(x'') \leqslant p(x''-x_0)+p(x'+x_0)$$

对一切 $x', x'' \in Z$ 成立．但由于 p 为次线性泛函，而 f 又在 Z 上被 p 控制，所以对任何 $x', x'' \in Z$，成立

$$f(x')+f(x'')=f(x'+x'') \leqslant p(x'+x'') \leqslant p(x''-x_0) + p(x'+x_0),$$

所以要寻找的 c 确实存在，事实上只要取 c 满足

$$\sup_{x'' \in Z}[-p(x''-x_0)+f(x'')] \leqslant c \leqslant \inf_{x' \in Z}[p(x'+x_0)-f(x')]$$

即可．这样一来，我们证明了的确存在 Y 上的线性泛函 g，使 g 是 f 的延拓，且仍然保持着 $g(x) \leqslant p(x)$, $x \in Y$.

下面证明存在全空间上定义的实线性泛函 $\tilde{f}$，使 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓，并且对一切 $x \in X$，成立 $\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$.

设$\mathscr{F}$是满足下面三个条件的实线性泛函 g 全体：

1° g 的定义域$\mathscr{D}(g)$是 X 的线性子空间．

2° g 是 f 的延拓，即$\mathscr{D}(g) \supset Z$，且当 $x \in Z$ 时，成立

$$g(x)=f(x).$$

3° 在$\mathscr{D}(g)$上 g 被p控制，即对一切 $x \in \mathscr{D}(g)$，有$g(x) \leqslant p(x)$.

在$\mathscr{F}$中规定顺序如下：若 $g_1, g_2 \in \mathscr{F}$，而 g_1 是 g_2 的延拓（即$\mathscr{D}(g_1) \supset \mathscr{D}(g_2)$，并且当 $x \in \mathscr{D}(g_2)$时，$g_1(x)=g_2(x)$），就规定 $g_2 \prec g_1$，容易证明，$\mathscr{F}$按这样规定的顺序成为半序集．

设$\mathscr{D}$为$\mathscr{F}$中的一个全序集，令$\mathscr{D}(h)=\bigcup\limits_{g\in\mathscr{D}}\mathscr{D}(g)$，定义$\mathscr{D}(h)$上泛函$h$如下：对任何$x\in\mathscr{D}(h)$，则必有$g\in\mathscr{D}$，使$x\in\mathscr{D}(g)$，规定$h(x)=g(x)$.

首先这样定义的h有意义，即若$x\in\mathscr{D}(h)$，并且有$g_1,g_2\in\mathscr{D}$，使$x\in\mathscr{D}(g_1)\cap\mathscr{D}(g_2)$时，必有$g_1(x)=g_2(x)$.

事实上，由于$\mathscr{D}$是全序集，g_1和g_2有顺序关系，不妨设$g_2<g_1$，则$\mathscr{D}(g_1)\supset\mathscr{D}(g_2)$，并且当$y\in\mathscr{D}(g_2)$时，有$g_1(y)=g_2(y)$，由于$x\in\mathscr{D}(g_1)\cap\mathscr{D}(g_2)$，所以$g_1(x)=g_2(x)$.

其次h是线性泛函，事实上若$x,y\in\mathscr{D}(h)$，必有$g_1,g_2\in\mathscr{D}$，使得$x\in\mathscr{D}(g_1)$，$y\in\mathscr{D}(g_2)$. 由于$\mathscr{D}$是全序集，不妨设$g_2<g_1$，则$y\in\mathscr{D}(g_2)\subset\mathscr{D}(g_1)$，于是对任何数$\alpha,\beta$，由于$\alpha x+\beta y\in\mathscr{D}(g_1)$，所以

$$h(\alpha x+\beta y)=g_1(\alpha x+\beta y)=\alpha g_1(x)+\beta g_1(y)=\alpha h(x)+\beta h(y),$$

即h是线性泛函. 最后h是f的延拓，并且在$\mathscr{D}(h)$上被p控制. 事实上，由$\mathscr{F}$的定义，易知$\mathscr{D}(h)\supset Z$，并且对任何$x\in Z$，必有$h(x)=f(x)$，即h是f的延拓，又对任何$x\in\mathscr{D}(h)$，必有$g\in\mathscr{D}$，使$x\in\mathscr{D}(g)$，并且$h(x)=g(x)$，但由于在$\mathscr{D}(g)$上成立$g(x)\leqslant p(x)$，所以$h(x)=g(x)\leqslant p(x)$，即h在$\mathscr{D}(h)$上被$p(x)$控制，由h的作法，易知h是$\mathscr{D}$的上界. 由Zorn引理，$\mathscr{F}$有极大元，设为$\tilde{f}$.

下证$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$，若$\mathscr{D}(\tilde{f})\neq X$，取$x_0\in X$，$x_0\overline{\in}\mathscr{D}(\tilde{f})$，令$Y$为由$\mathscr{D}(\tilde{f})$与$x_0$所张成的线性子空间，则由前面证明，必有$Y$上线性泛函$g$，使$g$是$\tilde{f}$的延拓，并且在$\mathscr{D}(g)=Y$上被$p$控制，由于$\tilde{f}\in\mathscr{F}$，所以$\tilde{f}$是$f$的延拓，故$g$也为$f$的延拓，因此$g\in\mathscr{F}$，显然$\tilde{f}<g$，并且$\tilde{f}\neq g$，这与$\tilde{f}$是$\mathscr{F}$中极大元矛盾，因而$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$，所以$\tilde{f}$即为定理所要求的泛函. 证毕.

现在让我们把上述关于实线性空间和实线性泛函的定理推广到复的情况.

定理 2 设X**是实或复的线性空间，**$p(x)$**是**X**上次线性泛函，**

$f(x)$是定义在X的子空间Z上的实或复的线性泛函，且满足

$$|f(x)|\leqslant p(x),\quad x\in Z,$$

则存在X上线性泛函$\tilde{f}$，它是f的延拓，且满足

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x),\ x\in X.$$

证明. (1) 若X是实线性空间，由定理1，知存在实线性泛函$\tilde{f}(x)$，它是f的延拓，且满足$\tilde{f}(x)\leqslant p(x)$，$x\in X$，又由于对任何$x\in X$，$\tilde{f}(-x)\leqslant p(-x)=p(x)$，所以$\tilde{f}(x)\geqslant -p(x)$，因而

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x),\ x\in X.$$

(2) 若X是复线性空间，则f是Z上复线性泛函，设$f(x)=f_1(x)+if_2(x)$，其中$f_1(x)$和$f_2(x)$分别为$f(x)$的实部和虚部. 另一方面，由于复线性空间也可以看作实线性空间，设X_r和Z_r分别表示实线性空间X和Z，于是f_1可看成在Z_r上的实线性泛函. 由于$|f_1(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant p(x)$，$x\in Z=Z_r$，由定理1，存在$X_r$上实线性泛函$\tilde{f}_1(x)$，使$\tilde{f}_1(x)$是$f(x)$的延拓，并且$\tilde{f}_1(x)\leqslant p(x)$，$x\in X_r$.

我们现在回过来看Z上复线性泛函f. 对$x\in Z$，由于f是复线性泛函，所以$if(x)=f(ix)$，$x\in Z$，于是有

$$if(x)=i[f_1(x)+if_2(x)]=f(ix)=f_1(ix)+if_2(ix),$$

比较实部，可知$-f_2(x)=f_1(ix)$，我们不妨设想，当$x\in X$时，仍有$-\tilde{f}_2(x)=\tilde{f}_1(ix)$成立，其中$\tilde{f}_1(x)$和$\tilde{f}_2(x)$分别为所求泛函$\tilde{f}$的实部和虚部，因而有理由令

$$\tilde{f}(x)=\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix),\quad x\in X.$$

(注意：X_r和X的元素相同，$ix\in X=X_r$，故$\tilde{f}_1(ix)$有意义)，这样定义的$\tilde{f}(x)$是$f(x)$的延拓. 事实上，当$x\in Z$时，$ix\in Z$，所以

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x)&=\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix)=f_1(x)-if_1(ix)\\&=f_1(x)+if_2(x)=f(x).\end{aligned}$$

现在只须证$\tilde{f}(x)$是X上线性泛函，且成立$|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)$，$x\in$

X，因 $\tilde{f}_1$ 可加，故 $\tilde{f}$ 满足可加性是显然的. 现只须证 $\tilde{f}$ 对乘以复数 $\alpha=a+ib$，满足 $\tilde{f}(\alpha x)=\alpha\tilde{f}(x)$，事实上，

$$\begin{aligned}\tilde{f}((a+ib)x)&=\tilde{f}_1(ax+ibx)-i\tilde{f}_1(iax-bx)\\&=a\tilde{f}_1(x)+b\tilde{f}_1(ix)-ia\tilde{f}_1(ix)+ib\tilde{f}_1(x)\\&=(a+ib)[\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix)]=(a+ib)\tilde{f}(x).\end{aligned}$$

下面证 $|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)$，$x\in X$. 若 $\tilde{f}(x)=0$，则结论显然成立；若 $x\in X$，使 $\tilde{f}(x)\neq 0$，设 $\tilde{f}(x)=e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$，于是 $|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}(x)e^{-i\theta}=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)-i\tilde{f}_1(ie^{-i\theta}x)$，但因 $|f(x)|$ 是实数，故 $|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)$，由于 $\tilde{f}_1$ 满足 $|\tilde{f}_1(x)|\leqslant p(x)$，$x\in X$，故

$$|\tilde{f}(x)|=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)=|e^{-i\theta}|p(x)=p(x).$$ 证毕.

定理 1 和定理 2 中事实上并未涉及到 X 上范数或度量等概念，而完全是线性问题. 下面我们把 Hahn-Banach 定理用于线性赋范空间的情况，得出两个重要的定理.

定理 3 **设 f 是赋范空间 X 的子空间 Z 上的线性连续泛函，则必存在 X 上线性连续泛函 $\tilde{f}$，它是 f 的保范延拓，即当 $x\in Z$ 时，有**

$$\tilde{f}(x)=f(x),\quad \text{并且}\ \|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z.$$

证明 因为在 Z 上有 $|f(x)|\leqslant\|f\|_Z\|x\|$，而 $p(x)=\|f\|_Z\|x\|$ 是 X 上次线性泛函，由定理 2，存在 $\tilde{f}$，它是 f 在全空间 X 上的延拓，并且满足 $|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)=\|f\|_Z\|x\|$，$x\in X$，这说明 $\tilde{f}$ 是 X 上线性连续泛函，并且 $\|\tilde{f}\|_X\leqslant\|f\|_Z$，另一方面，$X$ 的单位球包含 Z 的单位球，故

$$\|\tilde{f}\|_X=\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\x\in X}}|\tilde{f}(x)|\geqslant\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\x\in Z}}|\tilde{f}(x)|=\sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\x\in Z}}|f(x)|=\|f\|_Z,$$

所以 $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z$. 证毕.

定理 4 **设 X 是线性赋范空间，$x_0\in X$，$x_0\neq 0$，则必存在 X 上的线性有界泛函 $f(x)$，使得 $\|f\|=1$，并且 $f(x_0)=\|x_0\|$.**

证明 我们考虑X中一维子空间 $X_1=\{\alpha x_0 | \alpha$ 为复数$\}$，在X_1上定义泛函 $f_1(x)=f_1(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|$，其中 $x=\alpha x_0\in X_1$，它显然是线性泛函，又因为$|f_1(x)|=|\alpha|\|x_0\|=\|x\|$，故$f_1$是 X_1上线性连续泛函，并且$\|f_1\|_{X_1}=1$，由定理3，存在整个空间X上线性连续泛函f，它是f_1的延拓，并且$\|f\|_X=\|f_1\|_{X_1}=1$，特别取 $x=x_0\in X_1$，所以$f(x_0)=f_1(x_0)=\|x_0\|$. 证毕.

推论1 **设X是线性赋范空间，$x\in X$，若对X上所有线性连续泛函f，均有$f(x)=0$，则必有$x=0$.**

这由定理4，运用反证法立即可得.

§2. $C[a,b]$的共轭空间

前面我们已经讨论过一些空间的共轭空间，如$(l^1)'=l^\infty$，$(l^p)'=l^q$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1$. 这一节我们要找出$[a, b]$上连续函数所构成的空间$C[a, b]$的共轭空间. 这是 Riesz 的著名工作，它也可以看作是 Hahn-Banach 定理的一个重要应用.

设$g(t)$是区间$[a,b]$上的囿变函数，$\bigvee_a^b(g)$为$g(t)$在$[a,b]$上的全变差，由第五章§9定理2，积分$\int_a^b f(t)dg(t)$存在，其中$f\in C[a,b]$，读者不难证明成立

$$\left|\int_a^b f(t)dg(t)\right|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\cdot\bigvee_a^b(g)=\|f\|\cdot\bigvee_a^b(g). \tag{1}$$

作$C[a,b]$上泛函：

$$F(f)=\int_a^b f(t)dg(t),\qquad f\in C[a,b], \tag{2}$$

由第五章§9定理1，F是$C[a,b]$上线性泛函，由(1)式可知F是$C[a,b]$上线性连续泛函，并且$\|F\|\leqslant\bigvee_a^b(g)$. 我们自然会问：

$C[a, b]$ 上任何一个线性连续泛函 F 是否都可以对应一个囿变函数 g，使得(2)成立？回答是肯定的，这就是下面的 Riesz 定理.

定理 1 (Riesz 表示定理) **$C[a,b]$ 上每一个线性连续泛函 F 都可以表示成为**

$$F(f)=\int_a^b f(t)dg(t), \quad f\in C[a,b] \tag{3}$$

其中 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上囿变函数，并且 $\|F\|=\bigvee_a^b(g)$.

证明 在寻找空间 X 的共轭空间 X' 的表示时，我们总是先找出 X 的一组基 $\{e_k\}$ 的表示，然后作线性组合取极限以达到完全的表示. 在函数空间中，通常用区间 $[a,t]$ 的特征函数作为基，由它生成阶梯函数，再去逼近某些函数类. 对连续函数空间，我们也采取同样的路线，但是特征函数一般不连续，因而不属于 $C[a,b]$，故我们先把 $C[a, b]$ 上泛函 F 保范地延拓到有界函数空间 $B[a, b]$ 上，而阶梯函数属于 $B[a,b]$，然后再用阶梯函数去逼近连续函数，最后找到 $C[a,b]$ 共轭空间的一般表示.

我们知道在 $B[a,b]$ 和 $C[a,b]$ 中都用范数 $\|f(t)\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$，故 $C[a,b]$ 可以看成是 $B[a,b]$ 的子空间. 为简单起见，我们只考虑实空间 $C[a,b]$ 和 $B[a, b]$. 由 Hahn-Banach 定理知 F 可以保范地延拓成为 $B[a,b]$ 上线性连续泛函 $\tilde{F}$，使得当 $f\in C[a,b]$ 时，有 $\tilde{F}(f)=F(f)$，且 $\|\tilde{F}\|=\|F\|$.

考虑 $[a,t]$ 上特征函数 χ_t，当 $s\in[a,t]$ 时，$\chi_t(s)=1$，对其余的 s，$\chi_t(s)=0$. 显然 $\chi_t\in B[a,b]$. 用 $\tilde{F}$ 在 χ_t 上的值构造函数 $g(t)$ 如下：$g(a)=0$, $g(t)=\tilde{F}(\chi_t)$, $t\in[a,b]$. 下面证明 $g(t)$ 即为所求的囿变函数，事实上

(1) $g(t)$ 是囿变函数，这是因为对任意分划

$$T: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

有

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|g(t_j)-g(t_{j-1})| &= |\tilde{F}(\chi_{t_1})|+\sum_{j=2}^{n}|\tilde{F}(\chi_{t_j})-\tilde{F}(\chi_{t_{j-1}})| \\
&= \varepsilon_1\tilde{F}(\chi_{t_1})+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j(\tilde{F}(\chi_{t_j})-\tilde{F}(\chi_{t_{j-1}})) \\
&= \tilde{F}(\varepsilon_1\chi_{t_1}-\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{t_{j-1}})) \\
&\leqslant \|\tilde{F}\|\,\|\varepsilon_1\chi_{t_1}+\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j(\chi_{t_j}-\chi_{t_{j-1}})\| = \|\tilde{F}\|,
\end{aligned}
$$

其中 $\varepsilon_1=\operatorname{sign}\tilde{F}(\chi_{t_1})$; $\varepsilon_j=\operatorname{sign}[\tilde{F}(\chi_{t_j})-\tilde{F}(\chi_{t_{j-1}})]$, $j=1,2,\cdots,n$, 故$g(t)$是$[a,b]$上囿变函数，且

$$
\bigvee_{b}^{a}(g)\leqslant\sup_{T}\sum_{j=1}^{n}|g(t_j)-g(t_{j-1})|\leqslant\|\tilde{F}\|.
$$

(2) 设 $f(t)$ 为 $C[a,b]$ 中连续函数，对$[a,b]$中分划

$$
T: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,
$$

作阶梯函数

$$
h_n(t)=f(t_0)\chi_{t_1}(t)+\sum_{j=2}^{n}f(t_{j-1})[\chi_{t_j}(t)-\chi_{t_{j-1}}(t)].
$$

显然 $h_n\in B[a,b]$，注意到 $g(t_0)=g(a)=0$, 所以

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(h_n) &= f(t_0)g(t_1)+\sum_{j=2}^{n}f(t_{j-1})[g(t_j)-g(t_{j-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{n}f(t_j)[g(t_j)-g(t_{j-1})],
\end{aligned}
$$

当分划越来越细时，上式右端趋向于 $\int_a^b f(t)dg(t)$. 另一方面，由于 $f(t)$是连续函数，故 $f(t)$ 在$[a,b]$上一致连续，易知，当分划越来越细时，h_n 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(t)$；即按 $B[a,b]$ 中范数有 $\|h_n-f\|\to0$, 由 $\tilde{F}$ 的连续性，$\tilde{F}(h_n)\to\tilde{F}(f)$. 又因为在 $C[a,b]$上，$\tilde{F}(f)=F(f)$, 故

$$|f(x)|\leqslant\|g\|\|T\|\|x\|,\quad 即\quad |T^\times g(x)|\leqslant\|g\|\|T\|\|x\|,$$

所以

$$\|T^\times g\|\leqslant\|g\|\,\|T\|,$$

故 $T^\times$ 是有界算子，且 $\|T^\times\|\leqslant\|T\|$．现在用泛函延拓定理来证 $\|T\|\leqslant\|T^\times\|$，事实上，对任何 $x\in X$，若 $Tx\neq0$，则必有 $x\neq0$，由 § 1 定理 4，对这个 Tx，必有 $g\in Y'$，满足 $\|g\|=1$，并且 $g(Tx)=\|Tx\|$，于是

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=g(Tx)=(T^\times g)(x)\leqslant\|T^\times g\|\|x\|\\&\leqslant\|T^\times\|\|g\|\|x\|=\|T^\times\|\|x\|.\end{aligned}$$

而当 $Tx=0$ 时，上面不等式自然成立，故对一切 $x\in X$，都有

$$\|Tx\|\leqslant\|T^\times\|\|x\|.$$

这就证明了 $\|T\|\leqslant\|T^\times\|$，因而 $\|T\|=\|T^\times\|$．证毕．

例 设 T_E 是从有限维空间 E 到 E 中的线性算子．选取 E 中的基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，则对每个 $x\in E$，x 可表示成为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，设 $y=T_Ex$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则 $\eta_j=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{jk}\xi_k$，故 T_E 与矩阵 (a_{ij}) 对应．设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 E' 中满足 $f_k(e_j)=\delta_{jk}$ 的泛函，不难验证 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 也是 E' 中的基（事实上，E' 仍为 n 维欧氏空间），对任意的 $g\in E'$，设

$$g=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\cdots+\alpha_nf_n,$$

则

$$f_i(y)=f_i\left(\sum_{k=1}^{n}\eta_ke_k\right)=\eta_i,$$

$$g(y)=g(T_Ex)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_ia_{ik}\xi_k,$$

交换两个和式的次序，我们有

$$g(T_Ex)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k,$$

其中 $\beta_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\alpha_i$，记$(T_E^\times g)(x)=f(x)=g(T_E x)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k\xi_k$，可知 $T_E^\times$ 与(a_{ij})的转置矩阵对应

注 在 Hilbert 空间中，我们曾经考虑过T的 Hilbert 共轭算子 T^*，它的定义是满足$\langle Tx, y\rangle=\langle x, T^*y\rangle$，$x$，$y\in X$ 的算子．如果以A表示X到X^*中如下的变换：$Ax_0=f_{x_0}$，$x_0\in X$，其中 f_{x_0} 为 X^*中由 $f_{x_0}(x)=\langle x, x_0\rangle$所定义的泛函．则由 *Riesz* 表示定理知$A$是一一等距映照，并且由于

$$\begin{aligned}A(\alpha x_0+\beta y_0)(x)&=\langle x, \alpha x_0+\beta y_0\rangle=\overline{\alpha}\langle x, x_0\rangle+\overline{\beta}\langle x, y_0\rangle\\&=\overline{\alpha}Ax_0(x)+\overline{\beta}Ay_0(x)\\&=(\overline{\alpha}Ax_0+\overline{\beta}Ay_0)(x),\end{aligned}$$

知A是共轭线性算子，不难看出，此时成立

$$T^*=AT^\times A^{-1},$$

由于$T^\times$是线性变换，A和A^{-1}同为共轭线性变换，所以T^*仍是线性变换．$T^\times$和T^*虽有区别，但由于习惯上的原因，人们往往不写$T^\times$，径直写T^*，读者视情况自动加以区别就是了．

§4. 纲定理和一致有界性定理

这一节将给出 Banach 和 Steinhaus 在 1927 年给出的一致有界性原理，它是 Banach 空间理论的基石之一，许许多多古典的分析问题，经过抽象以后，都可以归结为这一原理，因而充分显示了泛函分析的重要作用．在证明一致有界原理之前，需要准备一个有力的工具——纲定理．

定义1 设M是度量空间R中的子集，如果M不在X的任何半径不为零的开球中稠密，则称M是X中的无处稠密集或疏朗集．

读者不难证明，在疏朗集的定义中可易开球为闭球．又可知M为X中疏朗集的充要条件为$\overline{M}$不包含内点．事实上，若M为疏朗集，而$\overline{M}$含有内点x_0，则由内点定义，存在开球$B(x_0, \varepsilon)$，$\varepsilon>0$，使$B(x_0, \varepsilon)\subset\overline{M}$，即$M$在$B(x_0, \varepsilon)$中稠密，这与$M$为疏朗集矛盾；反

之，若$\overline{M}$不含有内点，而M不是X中疏朗集，则由疏朗集定义，必有X中开球$B(x_0, \varepsilon)$，$\varepsilon>0$，使$\overline{M}\supset B(x_0, \varepsilon)$，这说明$x_0$是$\overline{M}$的内点，与$\overline{M}$中不含内点的条件矛盾.

定义2 设X是度量空间，M是X中子集，若M是X中有限或可列个疏朗集的并集，则称M是第一纲集，不是第一纲的集称为第二纲集.

我们有下述重要的贝尔(Baire)定理.

定理1 (Baire 纲定理) **若X是非空的完备度量空间，则X是第二纲集.**

证明 我们用反证法，若X是第一纲集，则存在有限或可列个疏朗集A_k，使$X=\bigcup\limits_{k} A_k$，我们不妨讨论可列的情形，即$X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$的情形. 因$A_1$是$X$中疏朗集，则由前述，$\overline{A}_1$不含有内点，因而$\overline{A}_1\neq X$，故$C\overline{A}_1=X-\overline{A}_1$是$X$中非空开集，因此在$C\overline{A}_1$中至少有一点$p_1$及$\varepsilon>0$，使$p_1$的$\varepsilon$邻域$B(p_1, \varepsilon)\subset C\overline{A}_1$，取$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$，则闭球

$$S_1=\{x \mid d(x, p_1)\leqslant \varepsilon_1\}\subset B(p_1, \varepsilon_1)\subset C\overline{A}_1,$$

即S_1与A_1不交. 又因A_2也是疏朗集，故$\overline{A}_2$也不含有内点，因此$\overline{A}_2$不含有开球$B(p_1, \varepsilon_1)$，于是$C\overline{A}_2\cap B(p_1, \varepsilon_1)=B(p_1, \varepsilon_1)-\overline{A}_2$也是$X$中非空开集，因此在$C\overline{A}_2\cap B(p_1, \varepsilon_1)$中至少有一点$p_2$及$\varepsilon_2'>0$，使$B(p_2, \varepsilon_2')\subset C\overline{A}_2\cap B(p_1, \varepsilon_1)$，令$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_2'}{2}$，则闭球

$$S_2=\{x \mid d(x, p_2)\leqslant \varepsilon_2\}\subset B(p_2, \varepsilon_2')\subset C\overline{A}_2\cap B(p_1, \varepsilon_1),$$

即S_2与A_2不交，并且$S_2\subset B(p_1, \varepsilon_1)\subset S_1$，又$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_2'}{2}\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}=\frac{\varepsilon}{2^2}$. 照此继续下去，我们得到一列闭球

$$S_k=\{x \mid d(x, p_k)\leqslant \varepsilon_k\},\ k=1, 2, \cdots,$$

使得S_k与A_k不交，并且$S_k\subset S_{k-1}$，$\varepsilon_k\leqslant\varepsilon/2^k$，这样，我们得到了一

个闭球套

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset \cdots,$$

S_k 的半径 $\varepsilon_k \leqslant \varepsilon/2^k$，下面我们证明 S_k 的中心 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中基本点列，事实上，当 $j>k$ 时，$S_j \subset S_k$，所以 $d(p_j, p_k) \leqslant \varepsilon_k \leqslant \varepsilon/2^k$，因此当 k 足够大时，对任何 $\varepsilon>0$，只要 $j>k$，便有 $d(p_j, p_k)<\varepsilon$，所以 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中基本点列．由于 X 完备，故存在 $p \in X$，使 $p_k \to p(k \to \infty)$，显然 p 在每个 S_k 中，但由于 S_k 和 A_k 无公共点，故 $p \overline{\in} A_k$，$k=1, 2, \cdots$，由假设 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$，所以 $p \overline{\in} X$，这就导致矛盾，因而 X 是第二纲集．证毕．

这一定理的逆是不正确的，布尔巴基(Bourbaki)在 1955 年曾举出反例：一个不完备的度量空间仍是第二纲集．

定理 2（一致有界性定理或共鸣定理） **设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$\mathscr{B}(X \to Y)$ 表示 X 到 Y 中的线性有界算子全体，$T_n \in \mathscr{B}(X \to Y)$，$n=1, 2, \cdots$，若对每个 $x \in X$，$\{\|T_n x\|\}$ 有界，即 $\|T_n x\| \leqslant C_x$，$n=1, 2, \cdots$，这里 C_x 是一与 x 有关的实数，那么，$\{T_n\}$ 一致有界，即存在与 x 无关的实数 C，使得对一切自然数 n，成立**

$$\|T_n\| \leqslant C.$$

证明 对任意自然数 k，令

$$A_k=\{x \mid \|T_n x\| \leqslant k, n=1, 2, \cdots\},$$

则 A_k 是闭集，事实上，若有 $x_i \to x$，$x_i \in A_k$，则对任何自然数 n，有 $T_n x_i \to T_n x$，但 $\|T_n x_i\| \leqslant k$，故 $\|T_n x\| \leqslant k$，所以 $x \in A_k$，即 A_k 是闭集。由假设，对任何 $x \in X$，存在实数 C_x，使 $\|T_n x\| \leqslant C_x$，$n=1, 2, \cdots$，取足够大的 k，使 $C_x \leqslant k$，则 $x \in A_k$，所以 $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$．由于 X 是 Banach 空间，由 Baire 纲定理，可知必有某一 k_0，使 $\bar{A}_{k_0}=A_{k_0}$ 包含 X 中某个半径不为零的开球，设为 $B(x_0, r)$，$r>0$，于是对任何 $x \in B(x_0,$

r)，必有 $\|T_n x\| \leqslant k_0, n=1,2,\cdots$. 现在要估计 $\|T_n\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|T_n x\|$，只须估计 $\{\|T_n x\|\}$ 当 x 属于单位球时的上界. 我们已知在 $B(x_0, r)$ 中，$\{\|T_n x\|\}$ 的上界是 k_0. 而单位球缩小 r 倍即成以原点为中心的球 $B(0,r)$，再平移向量 x_0 就是 $B(x_0, r)$. 故对任何 $x\in B(0,1)$，则 $rx+x_0\in B(x_0,r)$，因而有 $\|T_n(rx+x_0)\|\leqslant k_0$，于是，对任意的 $x\in B(0,1)$，有

$$\|T_n x\| = \frac{1}{r}\|T_n rx\| = \frac{1}{r}\|T_n(rx+x_0-x_0)\|$$

$$\leqslant \frac{1}{r}[\|T_n(rx+x_0)\| + \|T_n x_0\|] \leqslant \frac{2}{r}k_0.$$

上式对一切自然数 n 都成立，取 $C=\frac{2}{r}k_0$，则

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_n x\| \leqslant C, n=1,2,\cdots.$$

证毕.

作为一致有界性原理的特例，有下述的定理.

定理 3 **设 $\{f_n\}$ 是 Banach 空间 X 上的一列泛函，如果 $\{f_n(x)\}$ 在 X 的每点 x 处有界，那么 $\{f_n\}$ 一致有界.**

这只须在定理 2 中用实数域 R 或复数域 C 代替 Y 即可.

定理 4 **存在一个实值的连续函数，它的富里叶级数在给定的 t_0 处是发散的.** （共鸣定理在古典分析上的一个著名应用）:

证明 我们不妨考察 $C[0,2\pi]$，$t_0=0$ 时的情况，对 $f\in C[0,2\pi]$，总可以有富里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$，其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{2}dt,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos nt\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

这一级数当 $t=0$ 时，简化为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，它的部分和

$$s_n(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)(\sum_{k=1}^{n}\cos kt)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt]dt.$$

不难计算

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

记之为 $q_n(t)$. 因此$[0,2\pi]$上任何连续函数 $f(t)$, 其富里叶级数在 $t=0$ 处的部分和 $s_n(f)$ 等于$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)q_n(t)dt$. 我们要证明, 总可以找到这样的连续函数 $f(t)\in C[0,2\pi]$, 使

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)q_n(t)dt\to\infty\quad(n\to\infty),$$

即 $f(t)$的富里叶级数在 $t=0$ 处发散.

我们用泛函分析的观点考察部分和$s_n(f)$, 当 n 给定时, $q_n(t)$也给定了, 显然 $s_n(f)$是 $C[0,2\pi]$上的线性泛函, 而且由于

$$|s_n(f)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)||q_n(t)|dt$$

$$\leqslant\max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt,$$

因 $$q_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt\in C[0,2\pi],$$

故 $$k_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt<\infty,$$

因此$|s_n(f)|\leqslant k_n\|f\|$, 这说明 $s_n(f)$是 $C[0,2\pi]$上线性连续泛函, 并且$\|s_n\|\leqslant k_n$, 下面我们证明$\|s_n\|=k_n$, 只须证 $k_n\leqslant\|s_n\|$即可, 令

$$y_n(t)=\begin{cases}+1, & q_n(t)>0,\\ 0, & q_n(t)=0,\\ -1, & q_n(t)<0,\end{cases}$$

即
$$y_n(t)=\operatorname{sign} q_n(t)$$

于是
$$|q_n(t)|=y_n(t)q_n(t),$$

$y_n(t)$在$[0,2\pi]$上不连续，但对任意$\varepsilon>0$，总可以作一个连续函数$f_n(t)$，使满足

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}[f_n(t)-y_n(t)]q_n(t)\,dt\right|<\varepsilon,$$

（由于$q_n(t)$在$[0,2\pi]$上连续，这是不难做到的，事实上，只要在$y_n(t)$间断处用折线连接，使$f_n(t)$与$y_n(t)$充分接近即可），这样一来，这个$f_n(t)$满足

$$\|f_n\|=\max_{t\in[0,2\pi]}|f(t)|=1,\text{但}$$

$$|s_n(f_n)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_n(t)q_n(t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_n(t)-\right.$$

$$\left.-y_n(t))q_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y_n(t)q_n(t)\,dt\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}y_n(t)q_n(t)\,dt\right|-\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f_n(t)-y_n(t))q_n(t)\,dt\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|\,dt-\varepsilon=k_n-\varepsilon,$$

由ε的任意性，可知$\|s_n\|\geqslant k_n$，总之$\|s_n\|=k_n$。

因f的富里叶级数在$t=0$的部分和为$s_n(f)$，所以f的富里叶级数在$t=0$收敛等价于$\{s_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$收敛．我们要证明的定理的结论是，不可能$C[0,2\pi]$中每个函数的富里叶级数在$t=0$都收敛，这等价于说泛函列$\{s_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$在$C[0,2\pi]$上不可能处处收敛。由于收敛数列必有界，所以只要证明$\{s_n(f)\}$不可能在每点$f\in C[0,2\pi]$上有界．共鸣定理告诉我们，若泛函列$\{s_n(f)\}$在$C[0,2\pi]$

上点点有界，必导致一致有界，所以只要证明$\{s_n(f)\}$ 在$C[0,2\pi]$上不一致有界，就能推出$\{s_n(f)\}$不点点有界，因而不点点收敛问题就将证完. 要判断$\{s_n(f)\}$在$C[0,2\pi]$上不一致有界，只要证明$\|s_n\|=k_n$, $n=1,2,\cdots$无界即可，因为

$$k_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt>\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\right|dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|dv$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\to\infty(n\to\infty)$$

即$\{k_n\}$无界，这就证明了定理，证毕.

定理 4 说明，要求$C[0,2\pi]$中所有连续函数的三角级数都处处收敛是办不到的. 这一事实最初在 1876 年由 Reymond 给出，1910 年，Fejer 也给出了一个构造性的反例. 这里的证明不是构造性的，是一个纯粹的存在定理，它较构造性的方法简单，表现了泛函分析抽象概括的特点.

§5. 强收敛、弱收敛和一致收敛

定义 1 设X是线性赋范空间，$x_n\in X$, $n=1,2,\cdots$, 如果存在$x\in X$，使得$\|x_n-x\|\to 0$，则称点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于x，如果对任意的$f\in X'$，都有$f(x_n)\to f(x)$，则称点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$弱收敛于x.

显然强收敛必定弱收敛，但弱收敛不一定强收敛.

例 1 设$X=l^2$, $e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,}_{n-1\text{个}}0,1,0,\cdots)$, $n=1,2,\cdots$, 则$\|e_n\|$

$=1$, 故 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不强收敛于 0，但对任何

$$y\in(l^2)'=l^2,\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots),\ \sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2<\infty,$$

我们有 $\langle e_n, y\rangle=\eta_n\to 0$, 故 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 0 .

定义 2 设 X 是线性赋范空间，X' 是 X 的共轭空间，泛函列 $f_n\in X'$ $(n=1,2,\cdots)$, 如果存在 $f\in X'$, 使得

(1) $\|f_n-f\|\to 0$, 则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 f.

(2) 对任意 $x\in X$，都有 $|f_n(x)-f(x)|\to 0$，则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱*收敛于 f.

(3) 若对任意的 $F\in(X')'$，都有 $F(f_n)\to F(f)$，则称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 f.

一般来说，弱*收敛和弱收敛不一致，但如果 X 和 $X''=(X')'$ 之间能够建立起等距同构（例如 Hilbert 空间就是如此），则称 X 是自反的，在自反空间，这两种收敛就是等价的了.

定义 3 设 X 和 Y 是两个线性赋范空间，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 表示 X 到 Y 中的线性有界算子全体所成的空间，$T_n\in\mathscr{B}(X\to Y)$, $n=1,2,\cdots$, 若存在 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$, 使得

(1) $\|T_n-T\|\to 0$, 则称算子列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 T.

(2) 对任意的 $x\in X$，$\|T_nx-Tx\|\to 0$，则称 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 T.

(3) 对任意 $x\in X$ 和任意的 $f\in X'$，$f(T_nx)\to f(Tx)$，则称 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 T.

显然，由算子的一致收敛可导出强收敛，强收敛可导出弱收敛，反之不然.

例 2 设 $X=Y=l^2$, T_n 为 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中如下定义的算子:

$$T_n(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个}},\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots),$$

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2,\ n=1,2,\cdots.$$

显然，每个 T_n 是线性算子，并且 $\|T_n\|\leqslant 1$，这时

$$\|T_n x-0\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2\to 0,$$

即 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于 0，但 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不一致收敛于 0，事实上，对任意的自然数 n，令

$$e_{n+1}=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个}},1,0,\cdots),\ n=1,2,\cdots,$$

则 $\|e_{n+1}\|=1$，但 $T_n e_{n+1}=e_{n+1}$，故 $\|T_n\|\geqslant 1$，因此 $\|T_n\|=1$ 不收敛于 0，即 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不一致收敛于 0.

例 3 令 $X=Y=l^2$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，定义

$$T_n x=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个}},\xi_1,\xi_2,\cdots),\ n=1,2,\cdots$$

这是平移算子，T_n 显然是线性算子，并且 $\|T_n x\|=\|x\|$，所以 $\|T_n\|=1$. 对任意

$$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2=(l^2)',\ \langle T_n x,y\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\eta}_{k+n},$$

所以由 Schwarz 不等式可得

$$|\langle T_n x,y\rangle|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_{k+n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|x\|\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

即 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 0. 但 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不强收敛，这只要取 $x=e_1=(1,0,\cdots)$，则当 $n\neq m$ 时，就有

$$\|T_n e_1-T_m e_1\|=\|e_{n+1}-e_{m+1}\|=\sqrt{2},$$

故 $\{T_n e_1\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛.

我们有下面的定理

定理 1 设 T_n, $n=1,2,\cdots$, 是由 Banach 空间 X 到 Banach

空间Y中的有界线性算子序列，则$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛的充要条件是

(1) $\{\|T_n\|\}$有界.

(2) 对X中一稠密子集D中的x，$\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$收敛.

证明 必要性，若$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛，条件(2)成立是显然的. 现证成立(1)，由$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛，所以对任何$x\in X$，$\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$收敛，故$\{\|T_nx\|\}$有界，由共鸣定理知$\{\|T_n\|\}$有界.

充分性，设$\|T_n\|\leqslant M$，$n=1,2,\cdots$，对任何$x\in X$及$\varepsilon>0$，由于D在X中稠密，必存在$z\in D$，使$\|x-z\|<\dfrac{\varepsilon}{3M}$，又因$\{T_nz\}_{n=1}^{\infty}$收敛，故存在$N$，当$n>N$时，对任意的$p>0$，有

$$\|T_{n+p}z-T_nz\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是

$$\begin{aligned}\|T_{n+p}x-T_nx\|&\leqslant\|T_{n+p}x-T_{n+p}z\|+\|T_{n+p}z-T_nz\|\\&\quad+\|T_nz-T_nx\|\\&\leqslant\|T_{n+p}\|\|x-z\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T_n\|\|x-z\|\\&\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即$\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$是Y中Cauchy点列，由Y的完备性，知$\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$收敛，证毕.

将定理1用于泛函的情形，则可知Banach空间X上任何一列泛函$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果弱*收敛，必定有界，反之有界泛函列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$若在X的一个稠密子集上收敛，则必弱*收敛.

§6. 逆算子定理

逆算子定理又称开映照定理，是泛函分析最基本的定理之一，它反映了线性有界算子极为深刻的特征.

定理 1（逆算子定理） **设X和Y都是 Banach 空间，如果T是从X到Y上的一对一线性有界算子，则T的逆算子T^{-1}也是线性有界算子.**

为了证明本定理，首先给出一个引理，

引理 1 **设T是 Banach 空间X到 Banach 空间Y上的线性有界算子，则X中开单位球**

$$B_0=B(0,1)=\{x \mid \|x\|<1\}$$

的像TB_0包含一个以零点为心的球.

证明 我们分以下几步证明，

(a) $B_1=B(0,\frac{1}{2})$的像的闭包$\overline{TB_1}$含有一个开球 B^*.

(b) $B_n=B(0,2^{-n})$的像的闭包$\overline{TB_n}$含有以$0\in Y$为中心的球.

(c) TB_0包含以$0\in Y$为中心的球.

(a)的证明，先引入两个记号，设$A\subset X$，α是数，$\omega\in X$，则令

$$\alpha A=\{\alpha x \mid x\in A\},$$

$$A+\omega=\{x+\omega \mid x\in A\},$$

考虑$B_1=B(0,\frac{1}{2})$，对任何$x\in X$，总有正整数k，使$x\in kB_1$，这只要取$k>2\|x\|$即可. 于是$X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}kB_1$，由假设，$T$是映照$X$到$Y$上的，故

$$Y=TX=T(\bigcup_{k=1}^{\infty}kB_1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}kTB_1.$$

因Y完备，由纲定理知，必存在某个k_0，使$\overline{k_0TB_1}$含有一开球，这意味着$\overline{TB_1}$也含有一开球，设为$B(y_0,\varepsilon)$记为B^*. 这就证明了$B^*\subset\overline{TB_1}$.

(b) 的证明，因为$B^*=B(y_0,\varepsilon)\subset\overline{TB_1}$，则$B(0,\varepsilon)=B^*-y_0\subset\overline{TB_1}-y_0$，我们的目的是要证明$B(0,\varepsilon)\subset\overline{TB_0}$，但由于

$$B(0,\varepsilon)=B^*-y_0\subset\overline{TB_1}-y_0,$$

故只须证$\overline{TB_1}-y_0\subset\overline{TB_0}$就行了，设$y\in\overline{TB_1}-y_0$，于是$y_0+y\in\overline{TB_1}$，由(a)，$y_0\in B^*\subset\overline{TB_1}$，因而存在

$u_n\in TB_1,\ n=1,2,\cdots$，使$u_n\to y_0+y$，$v_n\in TB_1,\ n=1,2,\cdots$，$v_n\to y_0$，

即存在 $\quad w_n\in B_1,\ n=1,2,\cdots,\ Tw_n=u_n$

及 $\quad z_n\in B_1,\ n=1,2,\cdots,\ Tz_n=v_n$，

使$Tw_n\to y_0+y$，$Tz_n\to y_0$，然而

$$\|w_n-z_n\|\leqslant\|w_n\|+\|z_n\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

故$w_n-z_n\in B_0$，但

$$T(w_n-z_n)=Tw_n-Tz_n\to y_0+y-y_0=y,$$

这说明$y\in\overline{TB_0}$，但y是$\overline{TB_1}-y_0$中任意取的点，这就证明了

$$\overline{TB_1}-y_0\subset\overline{TB_0}.$$

由前所述，这已证明了$B(0,\varepsilon)\subset\overline{TB_0}$，由于

$$\overline{TB_n}=\frac{1}{2^n}\overline{TB_0},\ 故B\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\subset\overline{TB_n},$$

这就证明了(b)。

(c) 的证明，令

$$V_n=B\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right),\ n=1,2,\cdots,$$

我们证明$V_1=B\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset TB_0$，若$y\in V_1$，我们设法找出$x\in B_0$，使$Tx=y$，由(b)可知$V_1\subset\overline{TB_1}$，对上述的$\varepsilon>0$，总存在$x_1\in B_1$，使$\|y-Tx_1\|<\frac{\varepsilon}{4}$，即$y-Tx_1\in V_2$，但$V_2\subset\overline{TB_2}$，又存在$x_2\in B_2$，使得

$$\|y-Tx_1-Tx_2\|<\frac{\varepsilon}{2^3},\ 即\ y-Tx_1-Tx_2\in V_3,$$

如此继续作下去，必有点列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，其中$x_n\in B_n$，满足

$$\|y-T\sum_{k=1}^{n}x_k\|<\frac{\varepsilon}{2^n},\ n=1,2,\cdots,$$

已知 $x_n\in B_n$，即$\|x_n\|<\frac{1}{2^n}$，由X的完备性可知级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$收敛，记$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，则有$\|x\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$，所以$x\in B_0$，因当$n\to\infty$时，$T\sum_{k=1}^{n}x_k\to y$，另一方面，又有 $T\sum_{k=1}^{n}x_k\to Tx$，故 $y=Tx$，引理证毕.

逆算子定理的证明 借助引理 1，我们证明T将开集映照成开集. 设A是X中开集，任取 $y\in TA$，则存在 $x\in A$，使 $Tx=y$，由于A是开集，故存在 x 的 ε 邻域 $B(x,r)\subset A$，于是 $A-x$ 包含 0 的邻域 $B(0,r)$，令 $k=\frac{1}{r}$，则 $k(A-x)$包含单位球，由引理 1，知 $T[k(A-x)]=k[TA-Tx]$ 含有 0 点的开球，当然 $TA-Tx$ 也含有 0 点的某开球，即 TA 含有以 Tx 为中心的开球. 这就证明了 TA 是开集. T将开集映照成开集，又T是一一到上的，那么 T^{-1} 存在，并且由第六章 § 3 定理 2 知 T^{-1} 是连续的，即 T^{-1} 是线性有界算子，证毕.

定义 设X和Y是两个度量空间，f是X到Y中的映照，若f将X中的开集映照成Y中的开集，则称 f 是开映照.

由逆算子定理的证明过程可以看出，若X和Y是两个 Banach 空间，T是X到Y上的映照，则T是开映照，这个结论称为开映照定理.

逆算子定理说明，一个X到Y上的线性有界算子，只要具备“到上”和“一对一”这两个不涉及范数的一般映照性质（当然T的有界性涉及范数）就能导出逆算子连续性这一涉及范数和极限的拓扑性质. 因此，今后在验证 T^{-1} 是否存在和连续时，只须看是否一对一和到上就行了.

§7. 闭图象定理

定义 设X和Y是两个赋范空间，T是X的子空间$\mathscr{D}(T)$到Y中的线性算子，称 $X\times Y$ 中的集合

$$G(T)=\{(x,y)\,|\,x\in\mathscr{D}(T),\ y=Tx\}$$

为算子T的图象. 在 $X\times Y$ 中，定义 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$，易知$X\times Y$按$\|(x,y)\|$成为线性赋范空间，如果$G(T)$是$X\times Y$中的闭集，则称T是闭算子.

例1 设 $X=Y=C[0,1]$，$T=\dfrac{d}{dt}$，则T是线性算子，$\mathscr{D}(T)$为$C[0,1]$中一阶连续可微函数全体，记为$C^1[0,1]$，前已说过T是无界算子，但T是闭算子，它的图象是

$$G(T)=\{(x(t),x'(t))\,|\,x(t)\in C^1[0,1]\}.$$

事实上，若有

$$(x_n(t),x_n'(t))\in G(T),\quad n=1,2,\cdots,\ \text{且}$$

$$(x_n(t),x_n'(t))\to(x(t),\ y(t))\in X\times Y,$$

因 $\|(x(t),y(t))\|=\|x(t)\|+\|y(t)\|$，$(x(t),y(t))\in X\times Y$，易知$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于 $x(t)$，$\{x_n'(t)\}_{n=1}^{\infty}$也一致收敛于$y(t)$，由数学分析知道 $x(t)$可微，并且 $x'(t)=y(t)$，即$(x(t),\ y(t))\in G(T)$，这就证明了 $G(T)$是 $X\times Y$ 中闭集，因而 $T=\dfrac{d}{dt}$是闭算子.

下面要证明闭图象定理，它的意思是说，一个闭算子，如果是无界的，那么它的定义域一定不能是闭集. 这个定理的另一种说法是，若一个闭算子T的定义域是闭集，那么T是有界算子.

定理（闭图象定理） **设X和Y是 Banach 空间，T是$\mathscr{D}(T)\subset X$到Y上闭线性算子. 如果$\mathscr{D}(T)$是闭的，则T是有界算子.**

证明 读者不难证明两个 Banach 空间X与Y的乘积空间$X\times Y$按范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$$

仍是 Banach 空间. 由假设$\mathscr{D}(T)$是X中闭集, $G(T)$是 $X\times Y$ 中闭集, 故$G(T)$也是完备的度量空间, 并且由于 $\mathscr{D}(T)$ 是线性子空间, T 是线性算子, 易知$G(T)$是 $X\times Y$ 中的线性子空间, 即$G(T)$也是一 Banach 空间. 我们作算子 P: $G(T)\to\mathscr{D}(T)$,

$$P(x,y)=x,\quad (x,y)\in G(T),$$

显然P是线性算子, 且因

$$\|P(x,y)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|,$$

即P是有界算子. 又若$(x,Tx)\neq(y,Ty)$, 必有 $x\neq y$, 故

$$P(x,Tx)\neq P(y,Ty),$$

因而P是一对一的, P显然是到$\mathscr{D}(T)$上的映照由逆算子定理, P^{-1}有界, 即

$$\|P^{-1}x\|\leqslant\|P^{-1}\|\|x\|,$$

而$\|Tx\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|=\|P^{-1}x\|$, 所以$\|Tx\|\leqslant\|P^{-1}\|\|x\|$, 这说明$T$是有界算子. 证毕.

闭图象定理告诉我们, Banach 空间X上的无界闭算子, 其定义域至多只能在X中稠密, 而决不可能是整个 X. 上面例子中, 微分算子的定义域只能是 $C[0,1]$ 中稠密子集 $C^1[0,1]$, 而不能是 $C[0,1]$.

第九章 习 题

1. 设X是线性赋范空间, $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是X中 k 个线性无关向量, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一组数, 证明在X上存在线性连续泛函 f, 满足

(1) $f(x_\nu)=\alpha_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,k$,

(2) $\|f\|\leqslant M$ 的充要条件为: 对任何数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k}t_\nu\alpha_\nu\right|\leqslant M\left\|\sum_{\nu=1}^{k}t_\nu x_\nu\right\|$$

都成立.

2. 设X是线性赋范空间，Z是X的线性子空间，$x_0\in X$，又$d(x_0, Z)>0$，证明存在$f\in X'$，满足条件：

1° 当$x\in Z$时，$f(x)=0$；

2° $f(x_0)=d(x_0, Z)$；

3° $\|f\|=1$.

3. 证明无限维线性赋范空间的共轭空间也是无限维的。

4. 设X是线性赋范空间，若X'可分，则X也可分。

5. 证明l^1空间不是自反空间，即$(l^1)''\neq l^1$.

6. 证明Banach空间X自反的充要条件是X'自反.

7. 设f是定义在$C[a, b]$上的线性泛函，而且对$C[a, b]$中一切满足$x(t)\geqslant 0$的函数x，有$f(x)\geqslant 0$，证明f是$C[a, b]$上线性连续泛函，并证明存在$[a, b]$上单调增加函数$g(t)$，使

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t).$$

8. 设$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots$是一列数，证明存在$[a, b]$上囿变函数$g(t)$，使$\int_a^b t^n dg(t)=\alpha_n$，$n=0, 1, 2, \cdots$成立的充要条件为对一切多项式

$$p(t)=\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu t^\nu,$$

成立着

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \alpha_\nu\right|\leqslant M\cdot\max_{a\leqslant t\leqslant b}|p(t)|,$$

其中M为常数.

9. 设T为$l^p(p\geqslant 1)$中单向移位算子，即若$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)\in l^p$，则$Tx=y=\{0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$，求$T^\times$.

10. 证明度量空间X中子集M是疏朗集的充要条件为M的闭包的余集$C\bar{M}$在X中稠密.

11. 举例说明一致有界性定理中空间X完备的条件不能去掉.

12. 证明在完备度量空间X中存立闭球套定理，即若

$$S_\nu=\{x\,|d(x, x_\nu)\leqslant\varepsilon_\nu\},\quad \nu=1, 2, \cdots,$$

且$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$，$\varepsilon_\nu\to 0\quad(\nu\to\infty)$，则存在唯一的$x\in\bigcap_{\nu=1}^{\infty}S_\nu$，反之，若在度量空间$X$中存立闭球套定理，则$X$是完备度量空间.

13. 设 $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$ 是一列复数，若对任何

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in C_0,$$

级数 $\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\bar{\eta}_j$ 都收敛，证明：$y\in l^1$，其中 C_0 的定义见第七章题 10.

14. 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可测函数，$p\geqslant1$，若对一切 $g\in L^p[a,b]$，都有 $f(t)g(t)\in L^1[a,b]$，则 $f\in L^q[a,b]$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

15. 证明 Гельфанд 引理：设 X 是 Banach 空间，$p(x)$ 是 X 上泛函，满足条件：

1° $p(x)\geqslant0$;

2° $\alpha\geqslant0$ 时，$p(\alpha x)=\alpha p(x)$;

3° $p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)$;

4° 当 $x\in X$，$x_n\to x$ 时，$\varliminf_{n\to\infty}p(x_n)\geqslant p(x)$. 证明必有 $M>0$，使对一切 $x\in X$，成立 $p(x)\leqslant M\|x\|$.

16. 设 $T_n\in\mathscr{B}(X\to Y)$，其中 X 是 Banach 空间，Y 是线性赋范空间，若对每个 $x\in X$，$\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛，令 $Tx=\lim_{n\to\infty}T_nx$，证明 T 是 X 到 Y 中线性有界算子，并且 $\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

17. 设 X 是可分 Banach 空间，M 是 X' 中有界集，证明 M 中每个点列含有一个弱*收敛子列.

18. 证明空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是存在常数 M，使得 $\|x_n\|\leqslant M$，$n=1,2,\cdots$，并且对任何 $t\in[a,b]$，成立 $\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)$.

19. 设 X 是线性赋范空间，M 为 X 的闭子空间，若 M 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，当 $n\to\infty$ 时弱收敛于 x_0，那么必有 $x_0\in M$.

20. 证明 $l^p(p>1)$ 中点列 $x_n=\{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$，弱收敛于 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\in l^p$ 的充要条件为 $\sup_n\|x_n\|<\infty$，且对每个 k，$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$.

21. 设 X 是线性空间，$\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 是 X 上两个范数，若 X 按 $\|x\|_1$ 及 $\|x\|_2$ 都完备，并且由点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按 $\|x\|_1$ 收敛于 0，必有按 $\|x\|_2$ 也收敛于 0，证明存在正数 a 和 b，使

$$a\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant b\|x\|_1.$$

22. 设 T 是 Banach 空间 X 到线性赋范空间 F 中的线性算子，令

$$M_n=\{x \mid \|Tx\|\leqslant n\|x\|\},\quad n=1, 2, \cdots,$$

证明总有 M_{n_0} 在 X 中稠密.

23. 用闭图象定理证明逆算子定理.

24. 设 A 及 B 是定义在 Hilbert 空间 X 上的两个线性算子, 满足

$$\langle Ax, y\rangle=\langle x, By\rangle,$$

其中 x, y 为 X 中任意向量, 证明 A 是有界算子.

25. 设 T 为定义在复 Hilbert 空间 X 上的线性有界算子, 若存在常数 $\alpha_0>0$, 使 $\langle Tx, x\rangle\geqslant\alpha_0\langle x, x\rangle$, 则称 T 为正定的, 证明正定算子必有有界逆算子 T^{-1}, 并且

$$\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\alpha_0}.$$

第十章　线性算子的谱

谱论是泛函分析的重要分支之一．从《线性代数》课程中可知：有限维空间上的线性算子由它的特征值和最小多项式完全确定．将这一结论推广到有界线性算子的情况，研究它的结构，就是算子的谱理论．特征值的概念将相应地扩展为"谱"．由于特征值和逆算子有密切关系，谱论也大量涉及逆算子的问题．将算子求逆应用到微分算子和积分算子上，推动了微分方程和积分方程的发展．

§1. 谱的概念

考察 n 个未知数的线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}=y_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}=y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}=y_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

它对应系数矩阵 $A=(a_{ij})$．记 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则上述方程表示 n 维空间 E^n 上的线性算子 A：$Ax=y$．对复数 λ，若存在 $x\neq 0$，使 $Ax=\lambda x$，则称 λ 是 A 的特征值．它意味着 $(A-\lambda I)x=0$ 有非零解，即算子 $(A-\lambda I)$ 不存在逆算子．因此，我们为了弄清算子 A 的特征值，必须考察算子 $(A-\lambda I)$ 是否有逆算子的问题．

现在我们转向讨论无限维的情形．

定义 1　设 X 是赋范空间，$T\in\mathscr{B}(X\to X)$．若 T^{-1} 存在且是

定义在整个X上的有界线性算子，则称T是X上的正则算子.

关于正则算子有以下的简单性质:

1° T是正则算子的充要条件是存在有界算子$B\in\mathscr{B}(X\to X)$，使得

$$BT=TB=I, \quad I \text{ 是恒等算子.}$$

只须证充分性. 事实上，若$Tx=0$，则$x=BTx=0$，故T是一对一的. 对任何$y\in X$，因$Tx=TBy=y$，(令$By=x$)，故T的值域充满X，即T存在定义在整个X上的T^{-1}: $T^{-1}=B$. 这就证明了T的正则性.

2° 若A、B是正则算子，则$T=AB$也是正则算子，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 这只要验证定义立即可得.

定义 2 设$T\in\mathscr{B}(X\to X)$，λ是一复数. 若$(T-\lambda I)$正则，我们称λ是算子T的正则点，T的正则点全体称为T的正则集，或豫解集，记为$\rho(T)$. 不是正则点的复数称为T的谱点，其全体构成T的谱，记为$\sigma(T)$.

定义 3（谱的分类） 设$\lambda\in\sigma(T)$，即$T-\lambda I$不存在有界逆算子，可分三种情况:

(1) 如果$T-\lambda I$不是一对一，此时存在$x\in X$，$x\neq 0$，使$(T-\lambda I)x=0$，即$Tx=\lambda x$，这时称λ是算子T的特征值，x称为相应于特征值λ的特征向量. T的特征值全体称为T的点谱，记为$\sigma_p(T)$.

(2) $(T-\lambda I)$是一对一的，但值域不充满全空间.

(3) $(T-\lambda I)$是X到X上的一对一算子，但$(T-\lambda I)^{-1}$不是有界的.

(2)、(3)两类谱点合称为T的连续谱，记为$\sigma_c(T)$.

由逆算子定理可知，当X是 Banach 空间时，(3)不会出现，这时$\sigma(T)$只有(1)、(2)两类.

下面举一些例子.

例 1 设 T 是有限维空间 E^n 上线性算子, 则 $\sigma(T)=\sigma_p(T)$.

因为 E^n 是 Banach 空间, (3) 不会发生. 现在只须证, 如果 λ 不是特征值, $T-\lambda I$ 的值域一定充满 X, 即 (2) 也不会发生. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 E^n 的基, 可以证明

$$(T-\lambda I)x_1, (T-\lambda I)x_2, \cdots, (T-\lambda I)x_n$$

也是线性无关的.

事实上, 若存在 n 个复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(T-\lambda I)x_i=0,$$

即

$$(T-\lambda I)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=0.$$

由于 $(T-\lambda I)$ 是一对一的, 即知 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$. 这就证明了 $\{(T-\lambda I)x_i\}$ 是线性无关的. 所以

$$\text{span}\{(T-\lambda I)x_1, \cdots, (T-\lambda I)x_n\}=E^n,$$

即 $T-\lambda I$ 是映照"到上"的.

例 2 (单向移位算子) 设 $X=l^2$, 其中元素 x 为

$$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots),$$

线性算子 S 定义为

$$\begin{aligned}Sx&=S(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)\\&=(0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots),\end{aligned}$$

我们称 S 为单向移位算子. 这时可证 $\sigma_p(S)=\varnothing$.

先看 $\lambda=0$ 的情形. 这时由 $Sx=(0, \xi_1, \xi_2, , \cdots, \xi_n, \cdots)=0$, 立即可知 $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=\cdots=0$. 若 $\lambda\neq0$, 从 $(S-\lambda I)x=0$ 及

$$(S-\lambda I)(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$$

$$=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)-(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n,\cdots)$$
$$=(-\lambda\xi_1,\xi_1-\lambda\xi_2,\xi_2-\lambda\xi_3,\cdots,\xi_n-\lambda\xi_{n+1},\cdots)$$

可知
$$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=\cdots=0.$$

即 $x=0$，这就证明了 $\sigma_p(S)=\varnothing$.

不难看出：算子 S 的值域不会充满 l^2，因为 Sx 的第一个坐标都是 0，故 $0\in\sigma_C(S)$.

例 3 设 l^0 是 l^1 中只有有限个坐标不为 0 的数列全体. 线性算子 T 定义如下：

对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^0$，令 $Tx=(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots)$. 显然 T^{-1} 存在，且

$$T^{-1}x=(x_1,2x_2,\cdots,nx_n,\cdots).$$

T^{-1} 的定义域是 l^0. T^{-1} 作为 l^0 上的线性算子是无界的. 事实上，

$$\|T^{-1}\|=\sup_{\|x\|=1}\|T^{-1}x\|\geqslant\|T^{-1}e_n\|$$
$$=\|(0,0,\cdots,n,0,0,\cdots)\|=n.$$

其中 $e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots)$. 因此 0 是 T 的第三类谱点.

例 4 取 $E=C[a,b]$，设 $K(s,t)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(s)g_k(t)$，且 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 E 中线性无关. 定义算子 A 如下：

$$(Ax)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

求 A 的特征值应满足的条件.

$\lambda x-Ax=0$，意味着

$$\lambda x(s)-\sum_{k=1}^{n}\left[\int_a^b g_k(t)x(t)dt\right]f_k(s)=0. \tag{2}$$

当 $\lambda=0$ 时，上式有非零解的充要条件是存在 $x(t)\not\equiv0$，但

$$\int_a^b g_k(t)x(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

当 $\lambda\neq 0$ 时，容易看出(2)式的任何解 $x(s)$ 必可表示为下列形式

$$x(s)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(s).$$

将它代入(2)式，即得

$$\lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k(s)=\sum_{k=1}^{n}\left[\int_a^b g_k(t)x(t)dt\right]f_k(s).$$

由于 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是线性无关的，即可知

$$\lambda\alpha_k=\int_a^b g_k(t)x(t)dt. \tag{3}$$

这说明，λ 是算子 A 的特征值的充要条件是存在 $x(t)\neq 0$，能满足(3)式.

§2. 有界线性算子谱的基本性质

无限维空间上线性有界算子的谱已不再限于特征值，情况较有限维情形要复杂得多，但是还是有一些基本性质可以得出．这一节涉及的空间 X 均指 Banach 空间.

定理 1 设 $T\in\mathscr{B}(X\to X)$，$\|T\|<1$，则 $1\in\rho(T)$．**这时 $I-T$ 有定义在全空间上的有界逆算子：**

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\cdots+T^k+\cdots,$$

这里的级数按 $\mathscr{B}(X\to X)$ 中范数收敛.

证 因为 $\|T^2\|\leqslant\|T\|^2$，故 $\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$，但 $\|T\|<1$，必有 $\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^n<\infty$，所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\|T^n\|<\infty$，故 $\sum_{k=0}^{\infty}T^n$ 一致收敛于某有界算子 S（按 $\mathscr{B}(X\to X)$ 中范数收敛），下面验证 S 确实是 $(I-T)$ 的逆

算子.

$$(I-T)(I+T+\cdots+T^n)=(I+T+T^2+\cdots+T^n)$$
$$-(T+T^2+\cdots+T^{n+1})$$
$$=I-T^{n+1}.$$

令$n\to\infty$,则$\|T^{n+1}\|\leqslant\|T\|^{n+1}\to 0$(因$\|T\|<1$),故可知$\sum_{k=0}^{\infty}T^k$是$I-T$的右逆. 同理可知共为左逆. 这就证明了$S=(I-T)^{-1}$. 证毕.

定理 2(谱集的闭性) **设**$T\in\mathscr{B}(X\to X)$,**则** $\rho(T)$ **是开集**, $\sigma(T)$**是闭集.**

证 若 $\rho(T)=\varnothing$,则 $\rho(T)$自然是开集.(定理 3 将证明:有界线性算子的谱,不会超过它的范数,即 $\lambda\in\sigma(T)$,则$|\lambda|\leqslant\|T\|$,因此这种情形实际上不会发生).

若 $\rho(T)$非空,设 $\lambda_0\in\rho(T)$. 对任意的复数 λ,有恒等式:

$$T-\lambda I=T-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I$$
$$=(T-\lambda_0 I)[I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)].$$

现在考察$I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)$,由$\lambda_0\in\rho(T)$,$(T-\lambda_0 T)^{-1}$是有界算子,且非零.如果$|\lambda-\lambda_0|<\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$,则$\|(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\|<1$,由定理 1 知

$$V=[I-(T-\lambda_0 I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)]$$

有逆V^{-1},于是

$$(T-\lambda I)=(T-\lambda_0 I)V.$$

右边两项均存在有界逆算子,故$(T-\lambda I)$也有逆:

$$(T-\lambda I)^{-1}=V^{-1}(T-\lambda_0 I)^{-1}.$$

这就证明了,若 $\lambda_0\in\rho(T)$,则存在 λ_0 的邻域

$$U(\lambda_0)=\{\lambda\,\big|\,|\lambda-\lambda_0|<\|(T-\lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}\},$$
$$U(\lambda_0)\subset\rho(T),$$

由于 λ_0 是任取的,故 $\rho(T)$为开集,因而 $\sigma(T)$为闭集. 证毕.

定理 3 设$T\in\mathscr{B}(X\to X)$，则$\sigma(T)$是有界闭集，且当$\lambda\in\sigma(T)$时有$|\lambda|\leqslant\|T\|$. 由此可知$\rho(T)$非空.

证 我们只须证当$|\lambda|>\|T\|$时都是T的正则点，这时$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|<1$，故

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n T^n\in\mathscr{B}(X\to X).$$

这说明$\rho(T)\supset\{\lambda\,|\,|\lambda|>\|T\|\}$，故$\rho(T)$非空. 并由此知

$$\sigma(T)\subset\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant\|T\|\}.$$

结合定理 2 的结果，即知$\sigma(T)$是有界闭集. 证毕.

线性有界算子的谱还有许多重要的性质，例如谱集非空，$\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$，以及谱映照定理等等，限于篇幅，不能在这里一一叙述了.

§3. 紧集和全连续算子

为了把谱论应用于积分方程，我们要介绍一种全连续算子. 它的定义，又涉及到紧集的概念.

定义1(紧集和相对紧集) 设X是度量空间，M是X中子集. 如果对M中任何点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$都存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛于$M$中一元素$x_0$，则称$M$是紧集. 如果$X$中子集$N$的闭包$\overline{N}$是紧集，则称$N$是相对紧集.

例1 有限维欧氏空间中的有界闭集都是紧集，有界集则是相对紧集. 这由有界点列必有收敛子列的魏尔斯脱拉斯定理立即可得.

例 2 l^2中的单位球$\{x\,|\,\|x\|\leqslant1, x\in l^2\}$不是紧集.

这时，只须取 l^2 的基向量 $e_k=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1},1,0,\cdots)$. 显然，$\|e_k\|=1$, $k=1,2,3,\cdots$ 故$\{e_k\}$是有界集. 但是$\{e_k\}$中的两个不同元素之间的距离为$\|e_k-e_j\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. 因此其中不存在任何收敛子列. 由于单位球是闭集，所以也不是相对紧集.

这说明，在无限维空间，有界集不一定是紧集.

定义 2（全连续算子） 设X和Y是线性赋范空间，T是X到Y的线性算子. 如果对X的任何有界子集M，TM都是Y中相对紧集，则称T为全连续算子，亦称紧算子.

容易看出，T是全连续算子的充要条件是：设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的有界点列，则$\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$必有收敛子列.

例 3 设$K(s,t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(t)f_k(s)$，其中$f_k$，$g_k\in L^2[a,b]$，$\{g_k\}$是线性无关的. 定义

$$(A\varphi)(t)=\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds, \qquad \varphi\in L^2[a,b]$$

则A是全连续算子.

证 由于

$$\begin{aligned}(A\varphi)(t)&=\int_a^b\Big[\sum_{k=1}^{n}g_k(t)f_k(s)\Big]\varphi(s)ds\\&=\sum_{k=1}^{n}\Big[\int_a^b f_k(s)\varphi(s)ds\Big]g_k(t),\end{aligned}$$

我们可知算子A的值域是由$g_1,\cdots,g_n$所张成的有限维子空间F. 任给$L^2[a,b]$中有界集M，容易看出A是有界算子. 故AM是F中有界集. 因F是有限维空间，它的有界集都是相对紧的，故AM为相对紧集，证毕.

定理1 设$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$是X到Y上的全连续算子列，Y是Banach空间，而且$\|T-T_n\|\to0$，则T也是全连续算子.

证明 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是X中有界序列，我们用对角线方法在 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$中选取收敛子列。

因为T_1是全连续的，故存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{x_{1,m}\}_{m=1}^{\infty}$，使$\{T_1x_{1,m}\}_{m=1}^{\infty}$收敛。又因$T_2$全连续，存在$\{x_{1,m}\}_{m=1}^{\infty}$的子序列$\{x_{2,m}\}_{m=1}^{\infty}$使$\{T_2x_{2,m}\}_{m=1}^{\infty}$收敛。如此继续下去，可从$\{x_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$中选出$\{x_{n+1,m}\}_{m=1}^{\infty}$使$\{T_{n+1}x_{n+1,m}\}_{m=1}^{\infty}$收敛。我们选取对角线序列$\{x_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$，它对任意的$T_n$，总有$\{T_nx_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$收敛。

$\{x_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$是有界序列，设$\|x_{m,m}\|\leqslant c$对一切自然数$m$成立。任给$\varepsilon>0$，存在充分大的$N$，使$\|T_N-T\|<\frac{\varepsilon}{3c}$。因为$\{T_Nx_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$当$m\to\infty$时收敛，故存在$N_1$，当$p,q>N_1$时

$$\|T_Nx_{p,p}-T_Nx_{q,q}\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这样一来，$\{Tx_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$是$\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$的收敛子列。

事实上

$$\begin{aligned}\|Tx_{p,p}-T_{q,q}\|&\leqslant\|Tx_{p,p}-T_Nx_{p,p}\|\\&\quad+\|T_Nx_{p,p}-T_Nx_{q,q}\|+\|T_Nx_{q,q}\|\\&\leqslant\|T-T_N\|\|x_{p,p}\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T-T_N\|\|x_{q,q}\|\\&<\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c}\cdot c=\varepsilon.\end{aligned}$$

由于Y是Banach空间，可知$\{Tx_{m,m}\}_{m=1}^{\infty}$是收敛子列。证毕。

例 4 设$K(s,t)\in L^2(R)$，R是矩形$[a,b]\times[a,b]$。在$L^2[a,b]$上，作算子

$$(K\varphi)(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,\qquad \varphi\in L^2[a,b]$$

则K是全连续算子。

我们先证K是有界算子。这由下式可知

$$\|K\varphi(s)\|=\left(\int_a^b|(K\varphi)(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_a^b\left|\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\left[\int_a^b|K(s,t)|^2dt\cdot\int_a^b|\varphi(t)|^2dt\right]ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dtds\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|.$$

由于 $K(s,t)\in L^2(R)$，有

$$\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dtds<\infty.$$

这证明了K的有界性．现证K是全连续的．

设$\{e_n(t)\}$是 $L^2[a,b]$中的完全正交基，则$\{e_n(s)e_m(t)\}_{n,m=1}^{\infty}$是 $L^2(R)$的完全正交基．正交性是显然的，现检验它的完全性．设有 $f(s,t)\in L^2(R)$，使得对一切的 n,m 成立

$$\iint_R f(s,t)e_n(s)e_m(t)dsdt=0.$$

固定n，由富比尼定理知

$$\int_a^b e_m(t)\left(\int_a^b f(s,t)e_n(s)ds\right)dt=0.$$

由$\{e_m(t)\}$的完全性，知

$$\int_a^b f(s,t)e_n(s)ds=0,\quad \text{a.e.}$$

再用 $\{e_n(s)\}$ 的完全性，即知 $f(s,t)=0$ a.e.．这就证明了$\{e_m(t)e_n(s)\}$的完全性．于是 $K(s,t)$可按这组基展开：

$$K(s,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}e_m(t)e_n(s).$$

记

$$K_{p,q}(s,t)=\sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}a_{m,n}e_m(t)e_n(s),$$

则由 $K_{p,q}(s,t)$ 为核生成的积分算子，$K_{p,q}(s,t)$ 是全连续的(见例 4).

再由

$$\|K-K_{p,q}\|\leqslant\left[\int_a^b\int_a^b|K(s,t)-K_{p,q}(s,t)|^2dsdt\right]^{\frac{1}{2}}\xrightarrow[p,q\to\infty]{}0,$$

可知K是全连续算子列 $K_{p,q}$的极限，由定理 1 知，K是全连续的.

§4 自伴全连续算子的谱论

这一节，我们将证明下列定理

定理 1 (D. Hilbert) 在可分的 Hilbert 空间H上的任何全连续的自伴算子，一定具有以特征向量组成的完全直交系.

证明这一定理将分若干步骤. 我们用八个引理来完成.

引理1 如果$\|e\|=1$，A是自伴算子，则

$$\|Ae\|^2\leqslant\|A^2e\|,$$

并且当且仅当 e 是 A^2的特征向量(相应于特征值 $\lambda=\|Ae\|^2$)**时，上述不等式才成立等式.**

证明 由 Cauchy 不等式知

$$\|Ae\|^2=(Ae,Ae)=(A^2e,e)\leqslant\|A^2e\|\|e\|=\|A^2e\|.$$

上述式子等式成立的充要条件是 A^2e 为 e 的数量倍数：$A^2e=\lambda e$. 其中 λ 可以由下式定出

$$\|Ae\|^2=(Ae,Ae)=(A^2e,e)=(\lambda e,e)=\lambda\|e\|^2=\lambda.$$

证毕.

我们引入极大向量的概念. A 是有界线性算子，如果存在$\|e\|=1$，使得$\|Ae\|=\|A\|$，则称 e 是A的极大向量. 一般算子不一定存在极大向量. 但我们有

引理 2 全连续的自伴算子具有极大向量.

证 由$\|A\|$的定义可知，存在一列x_n，$n=1,2,\cdots$，$\|x_n\|=1$，

而 Ax_n 满足 $\|Ax_n\|\to\|A\|$. 因为 A 是全连续的，$\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中必有收敛子列. 不妨认为 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是收敛的. 设 $Ax_n\to y$. 可以断言 $z=\frac{1}{M}y$ 就是要找的极大向量，其中 $M=\|y\|=\|A\|$，实际上，由于

$$Az=\lim_{n\to\infty}A\left(\frac{Ax_n}{M}\right),$$

而 $\left\|\frac{Ax_n}{M}\right\|\leqslant1$，故 $\left\|A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right\|\leqslant M$. 由引理1,

$$M\geqslant\left\|A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right\|=\frac{1}{M}\|A^2x_n\|\geqslant\frac{1}{M}\|Ax_n\|^2\to M.$$

这就证明了 $\|Az\|=\lim\limits_{n\to\infty}\left\|A\left(\frac{Ax_n}{M}\right)\right\|=M$. 证毕.

引理 3 **设 e_0 是自伴算子 A 的极大向量，则 e_0 是 A^2 的特征向量**(具有特征值 $\|A\|^2$).

证 由引理 1 知

$$\|A\|^2=\|Ae_0\|^2\leqslant\|A^2e_0\|\leqslant\|A\|^2,$$

即

$$\|Ae_0\|^2=\|A^2e_0\|=\|A\|^2,$$

且 e_0 是 A^2 的特征向量，特征值为

$$\lambda=\|Ae_0\|^2=\|A\|^2.$$

证毕.

引理 4 **若 A^2 有特征值 M^2，则算子 A 有特征值 M 或 $-M$.**

证 将 $A^2e_0=M^2e_0$ 改写为

$$(A-MI)(A+MI)e_0=0.$$

如 $(A+MI)e_0\neq0$，则它是 A 的以 M 为特征值的特征向量. 如果 $(A+MI)e_0=0$，则 $-M$ 是 A 的特征值，e_0 是相应的特征向量. 证毕.

推论 1 **设 A 为全连续自伴算子，则 $\|A\|$ 或 $-\|A\|$ 中必有一为 A 的特征值.**

以下再证明 A 具有用特征向量构成的完全直交系.

引理 5　自伴算子 A 的相应于不同特征值的特征向量是彼此直交的.

证　设 $Ax=\lambda x, Ay=\mu y, \lambda\neq\mu$, 由于 A 为自伴算子, 所以 λ 及 μ 均为实数. 因此我们有

$$0=(Ax,y)-(x,Ay)=(\lambda-\mu)(x,y).$$

但 $\lambda\neq\mu$, 故 $(x,y)=0$.　　　　证毕.

引理 6　设 A 是全连续算子, δ 是任取的正数, 考察绝对值大于 δ 的特征值, 则 A 的与这些特征值相应的所有就范直交特征向量系只含有有限个向量.

证　设 S 是由特征向量组成的就范直交系, 其中每个特征向量相应的特征值的绝对值大于 δ. 设 $e_i, e_j\in S$, $\|e_i\|=1$, $\|e_j\|=1$, $(e_i,e_j)=0$. $Ae_i=\lambda_i e_i$, $Ae_j=\lambda_j e_j$, $|\lambda_i|>\delta$, $|\lambda_j|>\delta$.

我们有

$$\|Ae_i-Ae_j\|^2=\|\lambda_i e_i-\lambda_j e_j\|^2=|\lambda_i|^2+|\lambda_j|^2>2\delta^2.$$

就范直交系 S 当然是有界集. 如果它是无限集的话, 由于 A 是全连续的, 则必可选子列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Ae_n\}_{n=1}^{\infty}$ 包含收敛子列. 但 $\{Ae_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中元素彼此距离大于 $\sqrt{2}\delta$, 这就导致矛盾. 因而 S 是有限集. 证毕.

推论 2　全连续算子 A 的相应于非零特征值 λ 的就范直交特征向量至多为有限个.

综合引理 5 和引理 6 可得重要结果. 对全连续的自伴算子来说, 我们已经可以描绘出它的谱集的特征. 首先, 自伴算子的特征值都是实数. 事实上, 若 $Ae=\lambda e$, 则 $\lambda=(Ae,e)=(e,Ae)=\bar{\lambda}(e,e)=\bar{\lambda}$. 其次, 彼此不同的非零特征值至多为可列个. 这是因为彼此不同特征值相应的特征向量彼此直交(引理 5), 再由引理 6 知大于 $\frac{1}{n}$ 的特征值个数为有限个, 令 $n\to\infty$, 即知非零特征值总数至

多为可数个．最后，特征值除了原点外不可能有极限点．我们不妨将全连续自伴算子 A 的非零特征值排成一列(按绝对值的大小)

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n, \cdots$$

若有无限多个不同的值，则 $\lambda_n \to 0$。

现在我们再引进特征子空间的概念．设 λ 是 A 的特征值．所有以 λ 为特征值的特征向量所张成的子空间称为对应于 λ 的特征子空间．全连续算子的特征子空间是有限维的(见引理 6 的推论)．

这样，我们可以把全连续自伴算子的特征值重新排列，使得每一个特征值只对应一个就范的特征向量．其方法是将对应 k 个特征向量的特征值重复出现 k 次．我们不妨仍然按绝对值的大小排，记为

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n, \cdots$$

这里的 λ_i 可以彼此相同，相同的个数等于该特征值对应的特征子空间的维数．其相应的特征向量为

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n, \cdots$$

这些特征向量是彼此直交的，我们不妨认为它们都已就范化．因而 $\{\varphi_n\}$ 构成一个就范直交系．$\{\varphi_n\}$ 所张成的闭子空间记为 L．下面我们都这样排列 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$．

我们说 H 的子空间 M 是 A 的不变子空间，是指对 $x \in M$．总有 $Ax \in M$．L 是 A 的不变子空间．事实上，对 $y \in L$，存在

$$y_n = \sum_{k=1}^{n_p} \alpha_k^{(p)} \varphi_k, \quad y_n \to y,$$

但

$$Ay_n = \sum_{k=1}^{n_p} \alpha_k^{(p)} A\varphi_k = \sum_{k=1}^{n_p} \lambda_k \alpha_k^{(p)} \varphi_k \in L,$$

故 $Ay \in L$．

引理 7 **设 A 是自伴算子，H' 是 A 的不变子空间，则 H' 的正交补空间 H'' 也是 A 的不变子空间．**

证 设 $y\in H''$, 即对任何的 $x\in H'$, 有 $(x,y)=0$. 但是, $(x,Ay)=(Ax,y)=0$, 这说明 Ay 和 H' 直交, 即 $Ay\in H''$. 证毕.

引理 8 **设 H 是 Hilbert 空间, A 是全连续自伴算子, 对任何 $x\in H$, 可写成**

$$x=x'+x''=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k+x''.$$

这里 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 是 A 的特征向量(相应的特征值非零), **而且有 $Ax''=0$.**

证 A 的与非零特征值相应的特征向量 $\{\varphi_n\}$ 构成就范直交系, 它所张成的子空间为 L. 作 L 的正交补空间 M. 由引理 7 M 是 A 的不变子空间. 我们把 A 限制在 M 上考察, 得到 M 上的全连续自伴算子 A_M. 由推论 1, $\|A_M\|$ 或 $-\|A_M\|$ 中必有一个为 A_M 的特征值, 不妨设为 $\|A_M\|$ (对 $-\|A_M\|$ 证明完全类似), 于是存在 M 中单位向量 e_0, 使 $A_M e_0=\|A_M\|e_0$, 但由于 $e_0\in M$, 故

$$Ae_0=A_M e_0=\|A_M\|e_0,$$

即 e_0 也是 A 的相应于特征值 $\|A_M\|$ 的特征向量. 于是 $\|A_M\|$ 必须等于零. 事实上, 如果 $\|A_M\|$ 不为零, 那末由 L 的作法, 必有 $e_0\in L$, 但 L 与 M 正交, 必须 e_0 是零向量, 这与 e_0 是特征向量不为零矛盾. 由上述证明知 A 限制在子空间 M 上是零算子, $A_p=0$, 也就是说, 对一切 $x\in M$, $Ax=0$.

现在对 $x\in H$, 作分解 $x=x'+x''$, 其中 $x'\in L$, $x''\in P$. 因 L 中就范直交系 $\{\varphi_k\}$ 是完全的, 故

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\varphi_k+x'',$$

$Ax''=0$. 证毕.

现在我们来完成 Hilbert 定理的证明.

定理 1 的证明 对可分 Hilbert 空间 H 上的全连续自伴算子 A, $e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots$ 是相应于非零特征值的所有特征向量, 它们张

成L. 其正交补空间是M. 因H可分、M亦可分，其中有基$e'_1, e'_2, \cdots, e'_n, \cdots$. 它们也是特征向量，相应于特征值 0. 这样，特征向量$\{e_n\}$和$\{e'_n\}$合起来就构成H的完全直交基. 证毕.

到现在为止，我们已对全连续自伴算子的特征值作了完整的叙述. 它是有限维空间上自伴算子的直接推广. 这类算子有实值的特征值，其数目至多为可数，如果是无限多个，则它们不能有非零的极限点，只能以 0 为极限点. 非零特征值对应的特征子空间只能是有限维的. 现在我们要问：全连续自伴算子是否还有不是特征值的谱点？我们有下述的定理.

定理 2 **H上的全连续自伴算子A的非零谱点都是特征值. 若H是无限维空间，那么$0\in\sigma(A)$.**

证 (1) 若H是有限维空间，显然A只有实特征值.

(2) 若H是无限维空间，则 0 一定是谱点：$0\in\sigma(A)$. 事实上，若 0 是A的正则点，那么A^{-1}存在且是定义在全空间的有界算子. 由于$I=AA^{-1}$，对H中的任何有界点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{A^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$仍为有界点列，因为$A$是全连续的$\{A(A^{-1}x_n)\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$将有收敛子列. 但是$H$是无限维的，根据 §3 例 3 同样讨论，知$H$中就范直交系$\{e_k\}$中不可能选出收敛子列. 这就导致了矛盾. 所以$0\in\sigma(A)$. (这里只用$A$是全连续的，如果还假定$A$是自伴的，0 必是特征值，这里不给证明了.)

(3) 若λ不是特征值，$\lambda\neq 0$，则$\lambda\bar{\in}\sigma(A)$. 由谱集$\sigma(A)$的定义知，若$\lambda$不是特征值，可能属于谱的分类中的(2)、(3)两类谱点. 从逆算子定理知，A不会有(3)类谱点. 我们只须证λ不是(2)类谱点，即$(A-\lambda I)$的值域一定充满整个空间H. 现在任取$y\in H$，由引理 8，知

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k e_k+y'',\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^2<\infty,$$

其中 e_k 是 A 的相应于非零特征值 λ_k 的特征向量，$Ay''=0$. 我们要求出 $x\in H$，使 $(A-\lambda I)x=y$ 即可. 现在设法求出下式中的 ξ_k 和 x''.

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k+x'',\qquad Ax''=0,$$

$$(A-\lambda I)x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\lambda_k-\lambda)e_k-\lambda x'',$$

由直交展开的唯一性定理知

$$x''=-\frac{1}{\lambda}y'',\ \ \xi_k(\lambda_k-\lambda)=\eta_k.\ \ 即\quad \xi_k=\frac{\eta_k}{\lambda_k-\lambda}.$$

由于 λ_k 没有非零极限点 $\left|\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\right|<C$，故知 $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\eta_k}{\lambda_k-\lambda}\right|^2<\infty$. 这样就把 x 找到了. 因此 λ 不是(2)类谱点. 证毕.

§5. 具对称核的积分方程

最后，让我们考察谱论在积分方程理论中的应用.

设在矩形 R: $[a,b]\times[a,b]$ 上定义 $K(s,t)$, $K(s,t)\in L^2(R)$，而且 $\overline{K(s,t)}=K(t,s)$. 定义

$$A\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,\qquad \varphi(t)\in L^2[a,b]$$

A 称为具有平方可积对称核的积分算子. 它是自伴的. 实际上，由 Fubini 定理可知

$$\begin{aligned}(A\varphi,\psi)&=\int_a^b\left\{\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt\right\}\overline{\psi(s)}ds\\&=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\ \overline{\psi(s)}dt\,ds\\&=\int_a^b\varphi(t)\left\{\int_a^b K(s,t)\ \overline{\psi(s)}ds\right\}dt\end{aligned}$$

$$=\int_a^b \varphi(t)\left\{\int_a^b \overline{K(t,s)\psi(s)}ds\right\}dt$$

$$=\int_a^b \varphi(t)\left\{\overline{\int_a^b K(t,s)\psi(s)ds}\right\}dt$$

$$=(\varphi, A\psi). \qquad \varphi, \psi\in L^2[a,b]$$

由 § 3 例 4，知 A 还是全连续的.

设 A 是由上述 $K(s,t)$ 所决定的积分算子，则对任意 $\varphi\in L^2[a,b]$ 有

$$A\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k e_k.$$

其中 λ_k 是非零特征值，记与 λ_k 相应的特征向量 e_k 构成的就范直交系为 S 时，ξ_k 是 φ 按 S 展开的富氏系数. 事实上，我们根据 § 4 的 Hilbert 定理知

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k+x'', \quad Ax''=0$$

将 A 作用后即得所要求的结果.

现在我们考察下列积分方程

$$\varphi(s)=f(s)-\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt, \tag{*}$$

其中 $f(s)$，$K(s,t)$ 是已知的，$f\in L^2[a,b]$，$K(s,t)\in L^2(R)$，$\overline{K(s,t)}=K(t,s)$. 求满足条件(*)的 $\varphi(s)$.

定理1　对具有对称核的积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=f(s)+(A\varphi)(s).$$

如果 A 的特征值 $\{\lambda_k\}$ 都不等于 1，则上述方程有唯一解

$$\varphi(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,e_k)}{1-\lambda_k}e_k,$$

其中 e_k 是相应于 λ_k 的特征向量.

证　将方程 $\varphi=f+A\varphi$ 两边与 e_k 作内积，得到

$$
\begin{aligned}
(\varphi, e_k) &= (f, e_k) + (A\varphi, e_k) \\
&= (f, e_k) + (\varphi, Ae_k) \\
&= (f, e_k) + \lambda_k(\varphi, e_k),
\end{aligned}
$$

其中 λ_k 是实数. 因此，由 $\lambda_k \neq 1$ 可知

$$
(\varphi, e_k) = \frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}.
$$

这样，我们很自然想到欲求的函数 $\varphi(x)$可用它关于$\{e_k\}$的富氏系数加以表达:

$$
\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k} e_k.
$$

现在我们来检验它确实满足

$$
\varphi = f + A\varphi.
$$

首先，因为 $f \in L^2[a, b]$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 < \infty$，由于 A 是全连续自伴算子，没有非零的极限点，故 $\inf\limits_k |1-\lambda_k|$ 是正数，因而存在常数 C，使得$\dfrac{1}{|1-\lambda_k|} \leqslant C$，于是

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k} \right|^2 < \infty.
$$

这就是说，上述表示 $\varphi(x)$的级数在 $L^2[a, b]$中是收敛的，于是

$$
\begin{aligned}
A\varphi &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k} Ae_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k} \lambda_k e_k \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k} e_k = \varphi - f.
\end{aligned}
$$

这就得到

$$
A\varphi + f = \varphi.
$$

证毕.

定理 2　对具有对称核的积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt=f+A\varphi.$$

如果 A 的特征值$\{\lambda_k\}$中有些等于1，这些等于 1 的特征值记为$\{\lambda_k\}$（最多只有有限个），与 λ_k 相应的特征向量为 e_k. 这时若对某一个 e_k，$(f,e_k)\neq 0$，则方程无解. 如果对一切 e_k 均有$(f,e_k)=0$，则方程有解，而且解可以精确到加上由这些 e_k 张成的子空间中的一个向量.

证　若对某 e_k，$(f,e_k)\neq 0$，则方程不可能有解. 如若不然，方程 $\varphi=f+A\varphi$ 有解 $\varphi(s)$，则

$$(\varphi,e_k)=(f,e_k)+\lambda_k(\varphi,e_k)=(f,e_k)+(\varphi,e_k),$$

导出$(f,e_k)=0$，这和条件是矛盾的.

如果对 $\lambda_k=1$ 的特征向量 e_k，都有$(f,e_k)=0$，令$\varphi=\varphi'+\varphi''$，其中

$$\varphi'=\sum\frac{(f,e_k)}{1-\lambda_k}e_k,\quad (\lambda_k\neq 1)$$

$$\varphi''=\sum\xi_k e_k,\qquad (\lambda_k=1)$$

其中 ξ_k 是任意常数. 由条件 f 和 φ'' 正交，和定理 1 一样可证

$$A\varphi'=\varphi'-f.$$

对 φ''，我们有

$$A\varphi''=\sum\xi_k\lambda_k e_k=\sum\xi_k e_k=\varphi''.$$

所以

$$A\varphi=A\varphi'+A\varphi''=\varphi'-f+\varphi''=\varphi-f,$$

即

$$A\varphi+f=\varphi.$$

这就证明了 φ 是方程的解，由于 φ'' 在$\{e_k|\lambda_k=1\}$张成的子空间中可以任意取，而 φ' 是一意决定的，故解 φ 在精确到一个被加向量 φ'' 的意义下是唯一确定的. 证毕.

第十章　习　题

1. 设 $X=C[0,1]$, $Ax=tx(t)$, $x(t)\in X$. 证明 $\sigma(A)=[0,1]$, 且其中没有特征值.

2. 设 $X=C[0,2\pi]$, $Ax=e^{it}x(t)$, $x(t)\in X$. 证明 $\sigma(A)=\{\lambda:|\lambda|=1\}$.

3. 设 $X=l^2$,

$$Ax=A(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots),$$

试求 $\sigma(A)$.

4. 设 F 是平面上无限有界闭集, $\{\alpha_n\}$ 是 F 的一稠密子集, 在 2 中定义算子 T:

$$Tx=T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(\alpha_1x_1,\cdots,\alpha_nx_n,\cdots),$$

则 α_n 都是特征值, $\sigma(T)=F$, $F\backslash\{\alpha_n\}$ 中每个点是 T 的连续谱.

5. 在 2 中定义算子 T:

$$Tx=T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(0,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n,\cdots).$$

证明 T 没有特征值, $\rho(T)=\{\lambda:\ |\lambda|>1\}$, $\|R_\lambda\|=(|\lambda|-1)^{-1}$.

6. 设 λ 为线性算子 A^n 的特征值, 则 λ 的 n 次根中至少有一个是算子 A 的特征值.

7. 设 A 为 Banach 空间 X 上的线性有界算子, $\lambda_0\in\rho(A)$. 又设 A_n 为 E 上一列线性有界算子, 且 $\|A_n-A\|\to0$. 证明当 n 充分大后, A_n 也以 λ_0 为正则点.

8. 设 A 是 Banach 空间 X 上的线性有界算子, 当 $|\lambda|>\|A\|$ 时,

$$R_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}},\quad \|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|A\|}.$$

9. 设 A 为 X 上的线性有界算子, $\lambda,\mu\in\rho(A)$, 则

$$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu.$$

10. 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的线性有界算子, A^* 为 A 的共轭算子, 证明

$$\sigma(A^*)=\{\lambda:\bar{\lambda}\in\sigma(A)\}=\overline{\sigma(A)}.$$

11. 设 A 是 X 上的全连续算子, 证明: 当 X 是无限维 Banach 空间时, 只要 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 一定是无界算子.

12. 设 T_1 是 X_1 到 X_2 的全连续算子, T_2 是 X_2 到 X_3 的线性有界算子,

则 T_2T_1 是 X_1 到 X_3 的全连续算子.

13. 设 A 是 l^2 上线性算子, 记 $e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots)$

$$Ae_k=\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}e_j,$$

其中 $\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$, 证明 A 是全连续的.

14. 符号同第 13 题. 作算子 U.

$$Ue_k=\frac{1}{k}e_{k+1},\quad k=1,2,\cdots$$

证明 U 是 l^2 上全连续算子且 $\sigma(U)=\{0\}$.

15. 设

$$A\varphi=\int_0^1 e^{s+t}\varphi(t)dt.$$

求 A 的特征值和特征函数.

$\left(\text{提示: 记 } c=\int_0^1 e^t\varphi(t)dt\right)$

16. 如果积分算子的核为

$$K(s,t)=\sum_{k=1}^{n}p_k(s)q_k(t),$$

其中 $\{p_k\}$ 为线性无关的函数组, 则其非零特征值 λ 相应的特征向量有形式

$$e(t)=\sum_{k=1}^{n}c_kp_k(t),\qquad c_k\text{是常数.}$$

若记
$$q_{ij}=\int_a^b q_i(x)p_j(x)dx,$$

则 c_k 可由下式决定:

$$\lambda c_k=\sum_{i=1}^{n}q_{ik}c_i,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

17. 在 16 题中, 若 $p_i(x)\equiv q_i(x)$, $(p_i,q_j)=0$, $(i\neq j)$. 试求特征值和特征函数

18. 若

$$K(s,t)=\cos(s+t),\quad 0\leqslant s,t\leqslant\pi,$$

求积分算子K的特征值和特征函数。

19. 解方程

$$\varphi(x)=2\int_0^{\pi}\cos(x+s)\varphi(s)\,ds+1.$$

20. 解方程

$$\varphi(x)=3\int_0^{2}xs\varphi(s)\,ds+3x-2.$$